複素誘電率

牧野 泰才

平成 19 年 10 月 30 日

1 はじめに

電気回路を考えるにあたって、高周波になると現象が大きく異なることが多い。本稿では、その中でも表皮効果と誘電正接について扱い、複素誘電率について説明する。

2 表皮効果

2.1 Maxwell 方程式から波動方程式の導出

表皮効果とは、導体中を電流が流れる際に、その周波数が高くなると導体表面に電流が局在して流れるという効果である。この現象を導き出すために、まず Maxwell 方程式から波動方程式を導出する。Maxwell 方程式は、以下のように書かれる。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \quad (2)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{i} + \mu\epsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (4)$$

まず真空中を伝搬する電磁波を考えることにし、電荷なし ($\rho = 0$) かつ、電流なし ($\boldsymbol{i} = 0$) を仮定すると、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \quad (5)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \quad (6)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (8)$$

ここでベクトル演算の公式より、

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{V}) - \Delta\boldsymbol{V} \quad (9)$$

であるから、(7) 式の両辺の rot をとれば、

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}) + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) - \Delta\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu\epsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) = 0 \quad (10)$$

となるので、結局

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \quad (11)$$

という波動方程式が導き出される。ここで $c^2 = 1/\epsilon\mu$ とした。

同様の計算を (8) 式の両辺の rot をとって行うと、

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \quad (12)$$

となる。これが真空中を伝搬する電磁波の波動方程式である。電荷が存在せず、電流が流れないという境界条件における解を与える。

例えば 2 次元通信シートの間の解を考えてみる。xy 平面に無限に広がる 2 層の完全導体を考え、その間を電磁波が x 方向に伝搬するとする。このときは z 方向の電界と y 方向の磁界のみが生じるので、解を

$$E_z = A_0 \exp(-\mathrm{j}k_x x)\exp(\mathrm{j}\omega t) \quad (13)$$

と仮定すると、波数 k_x と周波数 ω の関係は、

$$k_x^2 = \mu\epsilon\omega^2 \quad (14)$$

であらわされる。このとき速度は $c = \frac{k_x}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ となる。

2.2 導体中の電流を考慮した場合

導体を考える場合には、電流が生じるため、$\boldsymbol{i} \neq 0$ を仮定する必要がある。電気伝導度を σ とすると、オームの法則より

$$\boldsymbol{i} = \sigma\boldsymbol{E} \quad (15)$$

の関係がある。

この関係を用いて、(4) 式を (10) 式に代入すると、

$$\Delta \boldsymbol{E} \ = \frac{\partial}{\partial t}(\mu\sigma \boldsymbol{E} \ + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}) \tag{16}$$

磁場に関しても同様の計算を行うと、

$$\Delta \boldsymbol{B} \ = \frac{\partial}{\partial t}(\mu\sigma \boldsymbol{B} \ + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}) \tag{17}$$

が得られる。この式は、電流なしの仮定で導き出された波動方程式に対して、第一項が追加された形になっている。

解として $\boldsymbol{E}\ (\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{E}\ (\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)$ を仮定すると、

$$(\Delta + \epsilon\mu\omega^2 - \mathrm{j}\omega\mu\sigma)\boldsymbol{E}\ (\mathbf{r}) = 0 \tag{18}$$

が得られる。ここで

$$\epsilon_c = \epsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega} \tag{19}$$

を導入すると、(18) 式は

$$(\Delta + \epsilon_c\mu\omega^2)\boldsymbol{E}\ (\mathbf{r}) = 0 \tag{20}$$

という形で表現される。これは、電流を考慮に入れなかった場合と同じ形になっている。すなわち、波数 k として、

$$\begin{aligned} k^2 &= \mu\epsilon_c\omega^2 \\ &= \mu\epsilon\omega^2 - \mathrm{j}\mu\sigma\omega \end{aligned} \tag{21}$$

を考えれば、これまでの議論がそのまま扱える。ここで (19) 式で導入された誘電率を複素誘電率と呼ぶ。

さて、この方程式で表される状況を、先ほどと同様の無限に広がる 2 枚の平行平板間を伝搬する電磁波で考える。導体が有限の電気伝導度を持ち、導体中に電流が流れるということは、導体内に x 方向の電界が存在しているということである。この電界が、導体内で z 方向にどの程度存在しているのだろうか?

そこで解として $E_x = A_0\exp(-\mathrm{j}k_z z)\exp(\mathrm{j}\omega t)$ を仮定すると、$k_z^2 = \mu\epsilon\omega^2 - \mathrm{j}\mu\sigma\omega$ として解かれる。つまり、真空中では実数であった波数 k が複素数として表現されることを意味する。これまで空間的に振動的であった解に、減衰項が考慮されたことに対応する。$k = k_r - \mathrm{j}k_i$ と表現した場合、仮定した解は

$$E_z = A_0\exp(-k_i z)\exp\{-j(k_r z + \omega t))\} \tag{22}$$

と書かれ、$\exp(-k_i z)$ が減衰を表現する項になる。

波数 k の虚部が減衰項を表すので、$k = \omega\sqrt{\mu}\sqrt{\epsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}$ のなかの、$\sqrt{\epsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}$ の部分を、一般的な複素数の形に展開することを考える。

例えば一般的な銅の電気伝導率 σ は $10^8(\Omega^{-1}m^{-1})$ 程度であり、ϵ は 10^{-12}、ω は 10^{10} 程度なので、2 項目の $\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$ の方が支配的になる。

$$\sqrt{\mathrm{j}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{23}$$

に注意すれば、複素誘電率の虚部は

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega}} \tag{24}$$

と近似できる。ここで、+ の項は発散する解であり起こりえないので、− の項を採用する。したがって減衰項は、

$$\exp(-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z) \tag{25}$$

と表される。このとき、指数の項が 1 となる距離 d は、(つまり振幅が 1/e に減衰する距離)

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{26}$$

である。

ここから分かることは、周波数が高くなると d は小さくなるということである。すなわち、高周波になるほど電流は導体の表面近傍のみを流れる。電流の流れ得る断面積は減少するが、導体の電気伝導率 σ は変化しないので、見かけ上の抵抗は大きくなる。

3　誘電正接

誘電正接とは、コンデンサ内での電気エネルギー損失の度合いを表す数値である。理想的なコンデンサは、誘電体内部の電子やイオンが電界の方向に向きを揃えようとするとき、それに要する時間を無視して考えている。しかし実際には応答は遅れて生じる。したがって、理想的なコンデンサにおいて直交しているはずの電圧と電流の位相が、完全には直交しなくなる。これは、電圧と同相の電流が流れることを意味し、その分の電力は誘電体内の分子やイオンの熱振動として消費される。

この状態の等価回路を図1に示す。理想コンデンサ C と、それに並列な寄生抵抗 R としてモデル化される。このとき、理想コンデンサに流れる電流を I_c、寄生抵抗に流れる抵抗を I_r とすると、その比率

$$\frac{I_r}{I_c} = \frac{1}{\omega CR} = \tan\delta \tag{27}$$

を誘電正接と呼び、δ を損失角と呼ぶ。

寄生抵抗で消費される電力は、電圧 V とそれと同相の電流成分 $I\sin\delta$ であるから、δ を微小として、$\sin\delta = \tan\delta$ が成り立つとすれば、

$$P_r = VI\tan\delta \tag{28}$$

となる。したがって、誘電正接が小さい値であるほど、無駄に消費される電力は小さい。

寄生抵抗による誘電体の電気伝導度を σ とおけば、このときの抵抗 R は

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{29}$$

である。ここで d は誘電体の厚みであり、S は極板面積を表す。一方理想コンデンサの静電容量は

$$C = \epsilon\frac{S}{d} \tag{30}$$

であるから、

$$\tan\delta = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{31}$$

と表される。ここで、前節で用いた複素誘電率を思い出すと、

$$\epsilon_c = \epsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

であったから、誘電正接は複素誘電率の実部と虚部の比率である

$$\tan\delta = \epsilon_i/\epsilon_r = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{32}$$

ということも出来る。

ここで1つ注意しなければならないのは、$\tan\delta$ は ω に反比例するように見えるが、実際には高周波になるほど $\tan\delta$ の影響が大きいという点である。これは、仮想的な抵抗成分 R が周波数に対して一定では無いことによる。周波数が高いほど、分極のスピードが電圧変化に追随できなくなるため同相成分が多くなり、寄生抵抗 R の効果が大きくなるのである。

同じ物体であっても、誘電正接は周波数によって異なるために、データシート等では周波数ごとの $\tan\delta$ が記載されていることが多い。

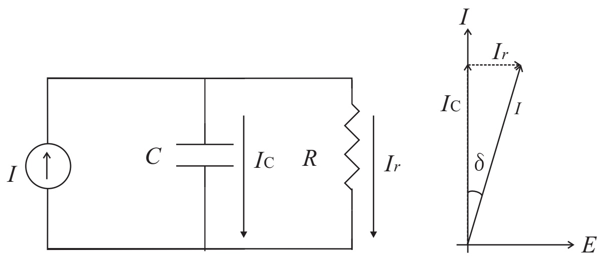

図 1: 高周波におけるコンデンサの等価回路

4　Q 値との関係

前回の短講の最後に、Q 値の定義として誘電正接を用いる場合もあるという話をした。そこで、今回の誘電正接の知識からそれを求めてみる。

その前に Q 値の定義をおさらいしておく。

$$Q = 2\pi\frac{\text{ある瞬間に系に蓄えられているエネルギー}}{\text{一周期の間に系から散逸するエネルギー}}$$

として与えられる。これを元に議論を進める。ただし、これに関してはきちんと書かれた資料が見つからなかったため、結果からの類推である。

まず、コンデンサとコイルを用いて並列共振回路を構成する場合を考える。コンデンサ、コイルともに理想的なものであれば、散逸するエネルギーは0であるから Q 値は無限大であるが、コンデンサの誘電正接により損失が存在するため、そうはならない。そこで、並列共振回路におけるロスが、誘電正接によるもののみと仮定する。

ここで、前回資料の Q 値の定義 (2) を思い出してみると、Q 値とは、「電圧値の比率 (直列共振回路)」であった。また、直列共振回路と並列共振回路との間では双対性から、電圧⇔電流の変換を行えば良いことも示した。したがって、Q 値の定義 (2) は「電流値の比率 (並列共振回路)」ということも出来る。

$\tan\delta$ の定義に立ち返ってみると、

$$\tan\delta = \frac{\text{抵抗に流れる電流}}{\text{コンデンサに流れる電流}} \tag{33}$$

であったことから、

$$Q = \frac{1}{\tan\delta} \tag{34}$$

という関係が導き出される。

直感的な説明としては、$\tan\delta$ が大きいほど、一周期あたりの損失も大きくなり、Q 値が下がるということである。

(おまけー丁寧に算出した場合ー)

一周期の間にコンデンサに蓄えられる最大のエネルギーは、

$$\begin{aligned} W_C &= CV^2 && (35)\\ &= C(\frac{I_C}{\omega C})^2 && (36)\\ &= \frac{I_C^2}{\omega^2 C} && (37) \end{aligned}$$

である。一方、抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_R = I_r^2 R T_0 \tag{38}$$

であるから、Q 値は

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{\frac{I_C^2}{\omega^2 C}}{I_r^2 R T_0} && (39)\\ &= \frac{2\pi}{\omega^2 R C T_0 \tan^2\delta} && (40) \end{aligned}$$

ここで、$\tan\delta = 1/\omega CR$ だったことを思い出せば、結局

$$Q = \frac{1}{\tan\delta} \tag{41}$$

となる。

参考文献

[1] 川村　清: “電磁気学 (岩波基礎物理シリーズ),” 岩波書店, 1994.
その他ウェブサイト多数。