Maxwell 方程式の基礎

牧野 泰才

平成 19 年 5 月 15 日

1 はじめに (言い訳)

学部時代に電磁気学の授業で Maxwell 方程式を習ったと思いますが、当時は式の形を覚えるのに夢中で、その意味をじっくりと考えたことが無かったという方も多いのではないでしょうか？

今実際に回路や電磁波などを実験で扱うようになった立場で、もう一度 Maxwell 方程式を見直してみると、思いのほかにその意味するところが分かったりするものです。本講では、もう一度 Maxwell 方程式って何だったのかを思い出すことを目的に、いくつかの例を交えて紹介したいと思います。(なのでアドバンストなことはあまり無く、非常に基本的な話がメインです)

2 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式は、以下の 4 式である。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

ここで、各変数は ρ が電荷密度 (単位体積当たりの電荷の分布量:この値を空間で積分すると電荷 Q の次元)、$\boldsymbol{i}$ が電流密度 (単位面積あたりの電流量:この値を面積で積分すると電流の次元)、ϵ が誘電率、c が光速を表す。なお光速 c と誘電率 ϵ 透磁率 μ との間には、$c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ の関係がある。

この 4 式が直感的に何を意味するのかを理解することを本講の目的とする。個人的な感想としては、この 4 式を直感的に理解するためには、この微分形式の表現よりも、積分形式の記述の方が分かりやすい。そこで、この 4 式を積分形式に変換するために必要となる数学的な定理、ガウスの定理とストークスの定理を紹介する。

3 ガウスの定理

ガウスの定理とは、

$$\int (\nabla \cdot \boldsymbol{E})dV = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{5}$$

である。

左辺の意味するところは、ある閉じた領域 V 内に微小な体積 dV がぎっしりと詰まっていることを考え、その微小体積内の $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ の値と dV とをかけた値を、閉じた領域内ですべて足し合わせたということである。

一方、右辺の意味するところは、その領域 V の表面に微小な面積 dS がぎっしりと埋まっていることを考え、その微小面積を垂直に横切る $\boldsymbol{E}$ の値と、その微小面積とをかけ合わせた値を、表面積すべてに足し合わせたという意味である。

この 2 つの量が一致するというのが、ガウスの定理の意味するところである。

ここで、$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ が単位体積あたりのベクトルの湧き出しを意味すると考えると (そしてそれが正しいことはこの後説明する)、この定理は理解しやすい。この前提に立った場合、微小な箱 dV からの湧き出しは、

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{E})dV \tag{6}$$

と書ける。ある小さな箱の中からベクトルが湧き出して箱の表面から出て行ったとしたら、箱がぎっしりと詰まっていることを考えているので、それはすぐに隣の箱に入って行くことを意味する。ここで隣の箱から湧き出しがないとすれば、隣の箱からは入ったのと同じだけ外に出て行くことになる。つまり、ベクトルはその箱の中を素通りする

このようなイメージで考えると、全ての微小な箱からのベクトルの湧き出しの合計値は全体積の表面から湧き出るベクトルの合計で測られることになる。

$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ が湧き出しを意味するのはなぜか

では、$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ が単位体積あたりのベクトルの湧き出しを意味するとはどういうことか？これは、$\nabla \cdot \boldsymbol{E}\ dV$ が微小体積 dV から湧き出してきたベクトルの総量を表すことを示せればよい。そこで、$\nabla \cdot \boldsymbol{E}\ dV$ を計算する。各辺の長さがそれぞれ dx, dy, dz である微小体積 dV を考えると、

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{E})dV = (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})dxdydz \quad (7)$$

となる。

ここで x 成分にのみ着目する (図 1)。$x = a$ での値 $E_x(a)$ とそこから dx 離れた点での値 $E_x(a+dx)$ の差は、dx の 2 次以降の項を無視すれば、

$$\begin{aligned} E_x(a+dx) - E_x(a) &\sim E_x(a) + \frac{\partial E_x(a)}{\partial x}dx - E_x(a) \\ &= \frac{\partial E_x(a)}{\partial x}dx \end{aligned} \quad (8)$$

であるから、x 軸に垂直な微小面を横切るベクトルの変化の総量は、断面積 $dydz$ をかけて、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz \quad (9)$$

と表される。これは式 (7) の第 1 項と一致する。同様にして y 方向、z 方向についても計算すれば、(7) 式がベクトルが微小体積 dV の中から湧き出してきた総量を表すようになっていることが分かる。

すなわち、$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ の意味するところは「単位体積あたりのベクトルの増加量を表す」と言える。

4　ストークスの定理

ストークスの定理とは、

$$\int (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \oint \boldsymbol{E}\ d\boldsymbol{s} \quad (10)$$

である。

左辺の意味するところは、ある断面積 S を考えその内部が微小な面積 dS で埋まっていることを考えた場合に、各面積 dS での $\nabla \times \boldsymbol{E}$ の法線成分と微小面積 dS をかけたものをすべて足し合わせたということである。

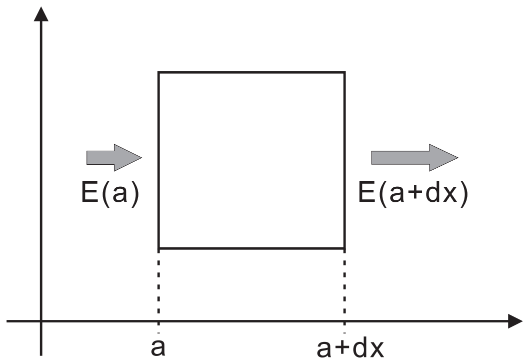

図 1: x 方向の流れがある場による div の考え方

一方、右辺の意味することは、上記の断面積 S の外側の閉じた線が、微小な線素 ds の集まりで構成されると考えたときに、$\boldsymbol{E}$ の接線成分に微小な線素 ds を掛け合わせたもの (すなわち $\boldsymbol{E}$ と $d\boldsymbol{s}$ との内積) を周回積分したものということである。

この 2 つの量が一致するというのが、ストークスの定理の意味するところである。

ここで右辺について考える。ある閉曲線についてその接線成分を足し合わせていったということは、この値が正のときには、その閉曲線を回す方向の成分が多いということになる。部分的に逆流しているかも知れないが、全体として輪を描く成分が多く含まれているということである。

そこで、ガウスの定理の説明のときと同様、天下り的に $(\nabla \times \boldsymbol{E})dS$ が微小面積の周りの渦を表すと考えれば、ストークスの定理は理解できる。

微小な四角形のうちのある一つに注目し、さらにその一辺に注目する。どの四角形の周りでも右回りに線積分をしているとすると、この一辺に沿った線積分は、その隣の四角形ではその辺を逆向きにたどって計算を行っているはずである。つまり、一つの微小な四角形の一辺で計算された量は、同じ辺を共有するすぐ隣の四角形の計算で打ち消されてしまう。結局残るのは、面の縁に沿った辺だけだということになり、左辺の値と一致する。

$\nabla \times \boldsymbol{E}$ が渦を意味するのはなぜか

rot を考える時には、以下のようなイメージを持つと理解しやすい。それは「rot とは、ベクトル場を水

流と考えたとき、その流れの中にある微小な水車の回転速度である」というイメージである [3]。

流れの中におかれた水車が回転するというのは、どういう条件であるか？z 軸を中心軸に持つ水車を $x-y$ 平面に置き、y 方向の流れのみがある場合を考える (図 2)。この場合に水車が回転するのは、水車の左右で流速に差がある場合である。このときの回転速度がどうなるかを考えると、流速を表す関数を A_y、水車の直径を dx とすると、両側での速度差は $A_y(a+dx)-A_y(a)$ であり、そのときのトルクは直径 dx で割った値

$$\frac{A_y(a+dx)-A_y(a)}{dx} \tag{11}$$

で表される。この直径を 0 に近づけていくと、結局 y 方向の流れによる水車の回転速度成分は、

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} \tag{12}$$

となる。

同様にして x 方向にのみ流れがある場合を考えると、

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{13}$$

という値が得られる。ただしここで注意が必要なのは、$\frac{\partial A_y}{\partial x}$ は反時計回りであるのに対して、$\frac{\partial A_x}{\partial y}$ は時計回りになるということである。よって、z 軸を回転軸に持つ水車の回転速度は、

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{14}$$

で表されることになる。これは $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の z 成分そのものである。今は z 軸を回転軸にもつ水車を考えたが、残りの 2 軸についても同様の議論をすることで $\nabla\times\boldsymbol{A}$ は説明される。

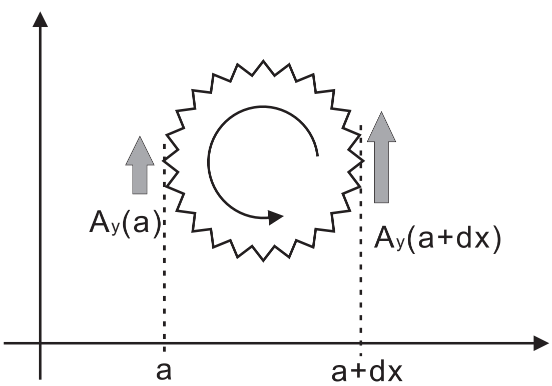

図 2: y 方向の流れがある場による rot の考え方

つまり、$\boldsymbol{A}$ のローテーションは $\boldsymbol{A}$ という流れ場の中に水車を置いたときに、最も回転速度の早くなる軸方向を向くベクトルであり、その大きさはその軸回りの回転速度に対応する。やや混乱しがちであるが $\nabla\times\mathrm{A}$ は回転しているベクトルではない。ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が回転しているときに、その回転軸の方向を指し示すベクトルである。

例えば (2) 式を見てみる。あとでも述べるがこれはファラデーの電磁誘導の法則を表す。コイルの中を貫く磁束が変動すると、それに応じた誘導起電力が生じるという法則である。ここで気をつけるのは、電場 $\boldsymbol{E}$ のローテーションは、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の時間変化に負号をつけたものに等しいということである。コイル内の磁束のように、直線的に磁束密度が変化する場合には、負号を気にしないで大雑把に考えれば、電場 $\boldsymbol{E}$ のローテーションは磁力線の方向と同じ方向を向くベクトルになっている。このようなローテーション成分をつくる電場 $\boldsymbol{E}$ が回っているのである。

5 Maxwell 方程式の積分形式

以上の 2 つの定理を用いることで、(1)〜(4) 式を積分形式に書き直すことが出来る。ダイバージェンスに関連する (1),(3) 式は両辺を体積積分する。ローテーションに関連する (2),(4) 式は両辺を面積分する。すると以下のように書き直せる。

$$\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \frac{1}{\epsilon}\int \rho dV \tag{15}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{16}$$

$$\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0 \tag{17}$$

$$c^2\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\epsilon}\int \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS+\int\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{18}$$

これで見やすくなっただろうか？

(15) 式の意味するところは、閉曲面を通る電束の総和が、内部の電荷の総和を ϵ で割ったものに等しいということである。静電場の場合には、電束は電荷のあるところが発生源になっているということを意味する。

(16) 式の意味するところは、ループをめぐる $\boldsymbol{E}$ の総和 (渦成分) が、ループを通る磁束密度の時間変化に等しい (負の関係で) ということである。これは、コイルの中心を貫く磁場が変化したときに起電力が生じ

るという、ファラデーの電磁誘導の法則を式で表現したものになっている。

(17) 式の意味するのは、閉曲面を通る磁束密度の総和は 0 であるということであり、磁場は必ず N と S の 2 極が対になって存在しているということを表す。電荷に対応するような、磁場を発生させる磁荷というものは存在しない。

(18) 式を理解するのが一番困難であろうか。今までの式とは異なり、右辺に 2 つの項が存在する。そこでこの意味を考える場合に、まず右辺第 2 項を考えないで理解する。これは時間的に変化する項が無く、定常的に電流密度 $\boldsymbol{i}$ の電流が流れている場合である。このときは、ある断面の縁部分をめぐる $\boldsymbol{B}$ の総和 (渦成分) が、ループを貫いて流れる電流に比例するということを意味する。これは電流の周りに右ねじの法則にしたがって磁場が発生するという、アンペールの法則を式で表現したものになっている。

では、右辺第 2 項はなんであろうか？この項がマクスウェルのもたらした大きな功績である。この項は変位電流を表す。図 3 に示すようにコンデンサを含む回路を考える。共通の閉曲線 Γ に沿って左辺の計算を行うことを考える。このとき、対応する面として閉曲線を縁としていれば任意の面を取れることから、A と B の 2 つの面を選択することが出来る。A を選択した場合には銅線が平面を貫いているので、右辺第 1 項の積分が存在する。一方 B を選択した場合には、コンデンサの中央で電流が流れていないため、右辺第 1 項は 0 になってしまう！これはおかしい。

ということで、マクスウェルが導入したのが第 2 項である。つまり、コンデンサ間の電界が変動する場合には、その変動する電界により磁場が生成されるという意味である。実際には電流は流れていないため、この項は変位電流と呼ばれる。

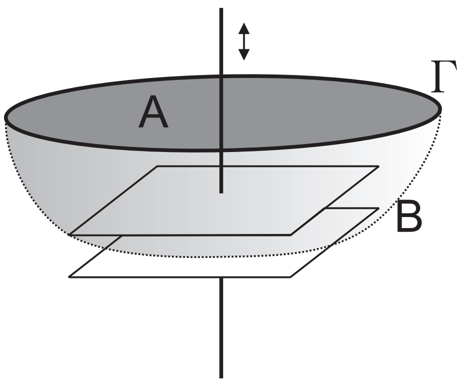

図 3: 変位電流の導入

以上がマクスウェル方程式の意味するところである。難しいようなイメージがあるかもしれないが、実は高校までに習った各種の電磁気の現象を、式で表現しただけのものであることが分かる。

クーロンの法則

例えば、(15) 式を用いればクーロンの法則を導き出せる。点電荷 q_1 が空間中にあった場合、電荷の位置から距離 r 離れた球を考える。対称性から球上では電界は外向きに均等に分布すると考えられるので、

$$4\pi r^2 E = \frac{q_1}{\epsilon} \tag{19}$$

である。したがって距離 r 離れた場所の電界は

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1}{r^2} \tag{20}$$

となる。そこに点電荷 q_2 が置かれていた場合には、静電場では力 $F = q_2 E$ が働くから、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{21}$$

のクーロン力が働くことになる。

ただし、静電場ではなく電荷が時間的に変動するような場合には、変動する磁場により電場が生成されたり、また粒子にローレンツ力も働くため、上の議論は成り立たないことに注意が必要。

電荷の保存則

(4) 式を用いると、電荷の保存則を導くことが出来る。(4) 式の両辺のダイバージェンスをとる。ベクトル公式により

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{22}$$

であるから、左辺は 0 になるので、

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{E})}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon}\nabla \cdot \boldsymbol{i} \tag{23}$$

左辺の $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ の部分に $\frac{\rho}{\epsilon}$ を代入すれば、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{24}$$

が導き出される。この式は、電流が湧き出すときには、内部の電荷が減少することを意味している。

仮に、マクスウェルが導入した変位電流の項が無かったらこの式はどうなっていただろうか？これは簡単に、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} \ = 0 \tag{25}$$

となる。電流はどこからも湧き出さず、閉じたループになっていなければならないという結果である。

これは明らかにおかしな結果である。コンデンサのような蓄電器に貯め込まれた電荷は電線で逃げ道を作ってやれば電位の低い方へ流れてゆくし、静電気や雷も同じである。電流は電荷が蓄積されているところを源として生じることが出来るのである。この意味からも、マクスウェルの導入した変位電流の項は無いとおかしいということがわかる。

6　完全導体の境界条件

完全導体 (抵抗が 0) が真空中においてあった場合、電磁波にとってその境界ではどのような拘束が生まれるのであろうか？これもマクスウェル方程式を解くことで計算できる。

電場の境界条件

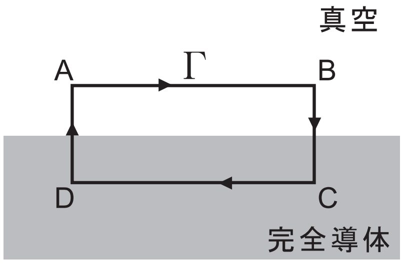

図 4: 電場の境界条件を考える際の積分経路

完全導体と真空とが平面で接しているとして、その境界面を含む長方形の経路 Γ を考える (図 4)。ここで AB と CD は境界面に平行、BC と DA は境界面に垂直であるとする。この長方形の面で面積分することを考えると、(16) は、

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \ d\boldsymbol{s} \ = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} \ dS \tag{26}$$

である。ここで BC と AD の長さを 0 に近づけることを考える。このとき面積 S は 0 に近づいていく。$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ が境界面付近で発散する理由は無いので、面積の減少に伴って面積分の項 (右辺) は 0 になる。また左辺の線積分の項は、AB の部分と CD の部分の項のみが残るので

$$\int_{AB} \boldsymbol{E} \ d\boldsymbol{s} \ + \int_{CD} \boldsymbol{E} \ d\boldsymbol{s} \ = 0 \tag{27}$$

AB,CD の長さを十分短く取れば、それぞれの線分上での値は一定とみなせる。線積分の方向が逆向きであることを考えれば、結局、

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{E}_{CD} \tag{28}$$

である。つまり、電界の接線成分は境界において連続であるということを意味する。

ここで今考えている境界は完全導体であり、完全導体内部には電界が存在しないから、$\mathbf{E}_{CD} = 0$ である。すなわち、完全導体と接する真空中の電場においては、境界面に平行な成分

$$\mathbf{E}_{//} = \mathbf{0} \tag{29}$$

が境界条件として得られる。

磁場の境界条件

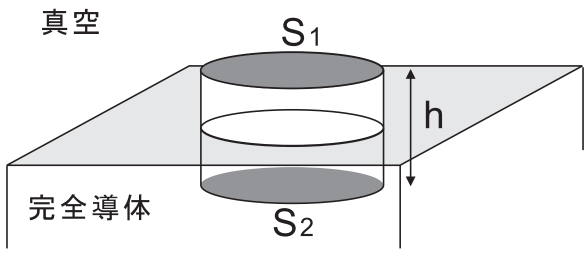

図 5: 磁場の境界条件を考える際の積分する体積

次に磁場の境界条件を求める。完全導体と真空との境界に、境界面に平行な上底と下底の面積が S_1, S_2 で、高さ h の十分小さい円柱板を考える (図 5)。式 (17) から

$$\int_\Sigma \boldsymbol{B} \ \cdot \boldsymbol{n} \ dS = 0 \tag{30}$$

である。Σ は円柱板の表面積を表す。

ここで、高さ h を 0 に近づける。このとき円柱の側面からの面積分への寄与は無くなり、上底 S_1 と下底 S_2 の寄与だけが残る。

$$\int_{S_1} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \ dS_1 + \int_{S_2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \ dS_2 = 0 \tag{31}$$

各面内での磁束密度の変動は小さく値は一定であると考えると、法線の向きが反対であることに注意すれば、

$$\mathbf{B}_{S_1} = \mathbf{B}_{S_2} \tag{32}$$

である。磁束密度の法線成分は境界において連続であるということを意味する。

今、完全導体を考えている。完全導体内において変動する磁場が存在する場合には、それを打ち消すために渦電流が流れる。この渦電流は永続的に流れ続けるため、外部磁場の変動は完全導体内では完全に打ち消される (マイスナー効果)。したがって、$\mathbf{B}_{S_2} = 0$ であるから、$\mathbf{B}_{S_1} = 0$ である。つまり、

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{0} \tag{33}$$

ここで、完全導体の境界面に垂直に z 軸を選び、境界面のごく近傍の真空側に x 軸と y 軸を選び、真空中での (4) 式の x 成分と y 成分を書き下すと、

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{34}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{35}$$

となる。ここで、$\mathbf{E}_{//} = 0$ を思い出すと、2 式とも右辺は 0 である。また、$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{0}$ より、$B_z = 0$ であるから、結局

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \tag{37}$$

である。これは、

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{//}}{\partial n} = 0 \tag{38}$$

と書くことが出来る。ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は境界面に垂直な方向 (今の座標系では z 方向) への偏微分を表す。つまり境界面に平行な磁場成分の垂直方向の勾配も 0 になる。

仮に水平方向の磁場成分の勾配があった場合を考える。このときには磁場のローテーション成分が存在することになる。磁場のローテーション成分はその回転軸の方向なので、境界面に対して平行な成分となる。これが電界の時間変化に等しいというのが (4) 式の意味するところであったから、境界面上で電界の水平成分が存在することになってしまい前の結果と矛盾する。したがって $\frac{\partial \mathbf{B}_{//}}{\partial n} = 0$ となるわけである。

さいごに

というように、境界面での電磁場の境界条件を算出することが出来る。当然、他にも様々な法則が導出できるので、いろいろと導き出してみるのが面白いかもしれない。

参考文献

[1] ファインマン, レイトン, サンズ　宮島龍興訳：“ファインマン物理学 III 電磁気学,” 岩波書店, 1971.
[2] 川村　清: “電磁気学 (岩波基礎物理シリーズ),” 岩波書店, 1994.
[3] 長沼　伸一郎: “物理数学の直観的方法,” 通商産業研究社, 1987.
[4] http://homepage2.nifty.com/eman/