音響系と電気回路のアナロジー

牧野 泰才

平成 18 年 7 月 18 日

1 イナータンス

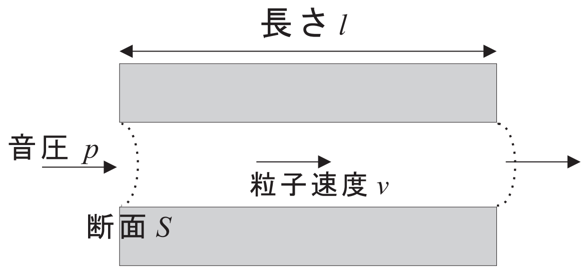

図 1: インダクタンスに対応する音響素子

図 1 に示す、断面積 S 長さ l の管を考える。管の長さ l が波長より十分小さい場合、管の中の気体は一体となって運動する。つまり、気体の密度を ρ とした場合、この管内部の気体の質量 m は

$$m = \rho l S \tag{1}$$

と表されるから、この質量の物体の運動を考えればよい。

管の片断面に圧力 p が加わった場合、力 pS が作用するから、管内の運動方程式は、

$$pS = \rho l S \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

である。断面積 S の管の媒質が一様に速度 v で動くときの体積の動く割合は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Sx = Sv$ であり、これを体積速度と称し音響系ではこの値を用いる。

そこで体積速度 $u = Sv$ を用いて書き直すと、

$$p = \frac{\rho l}{S}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

となる。

電気系のインダクタンスの式を思い出すと、

$$V = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

であったので、電気系の電圧 V と圧力 p、電流 I と体積速度 u をそれぞれ対応させて考えると、

$$m_A = \frac{\rho l}{S} \tag{5}$$

と電気系のインダクタンスが対応する。よって、このような細管は電気回路のインダクタンスとして等価回路を考えることが出来る。m_A をイナータンスと呼ぶ。

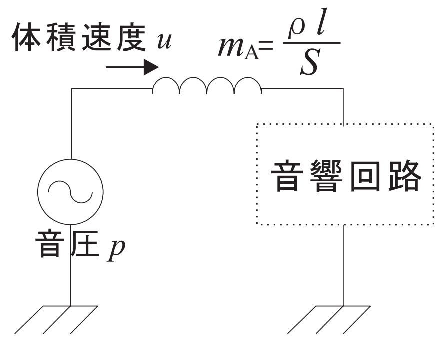

図 2: イナータンスの等価回路

2 音響コンプライアンス

図 3 に示すような、体積 V の小空洞に断面積 S の開口がある容器を考える。波長に対して容器のサイズが十分小さいとき、気体は一体となって運動する。ここで、容器内部の圧力変化を $\mathrm{d}p$、外部の圧力を p_0、開口部における気体の変位を x とする。

気体の断熱変化の式より、

$$pV^\gamma = const \tag{6}$$

であり、この式を全微分すると

$$\frac{\mathrm{d}p}{p_0} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \tag{7}$$

が得られる。一方、体積変化 $\mathrm{d}V$ は、気体の変位 x を用いて、

$$\mathrm{d}V = -Sx \tag{8}$$

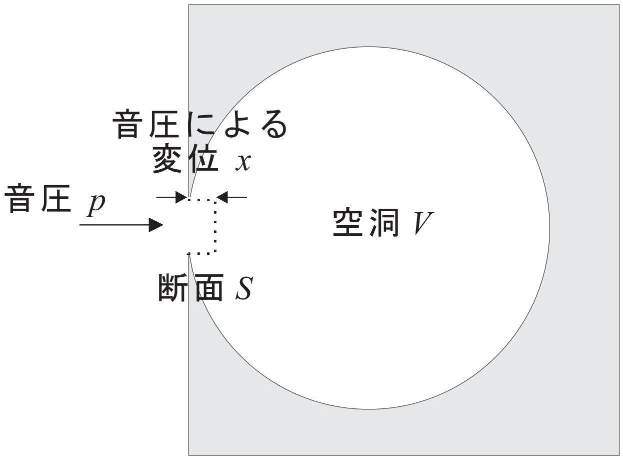

図 3: キャパシタンスに対応する音響素子

と表せるから、式 (7) の $\mathrm{d}V$ に式 (8) を代入して、

$$\mathrm{d}p = \gamma \frac{Sx}{V} p_0 \tag{9}$$

となる。体積速度 u は、断面積 × 粒子速度 ($v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$) であるから、$Sx$ は

$$Sx = \int u \ \mathrm{d}t \tag{10}$$

と書けるので、外部圧力 p_0 を基準圧力とし、基準圧からの変動成分 $\mathrm{d}p = p$ と書き換えて (9) 式を書き直すと、

$$p = \frac{\gamma p_0}{V} \int u \ \mathrm{d}t \tag{11}$$

ここで電気系のキャパシタンスを思い出すと、

$$V = \frac{1}{C} \int i \ \mathrm{d}t \tag{12}$$

と書けることから、小空洞は電気系のキャパシタンスとして等価回路を考えることが出来る。ここでキャパシタンス C に相当するのは

$$C_A = \frac{V}{\gamma p_0} \tag{13}$$

である。この C_A を音響コンプライアンスと呼ぶ。

ここで、音速 c は気体の密度 ρ を用いて、

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} \tag{14}$$

と表せるから、(11) 式と (13) 式はそれぞれ

$$p = \frac{\rho c^2}{V} \int u \ \mathrm{d}t \tag{15}$$

$$C_A = \frac{V}{\rho c^2} \tag{16}$$

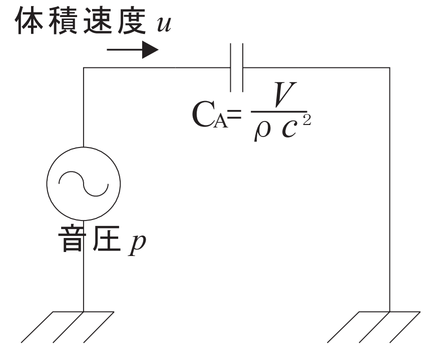

図 4: 音響コンプライアンスの等価回路

と書ける。

ここで音圧 p は外部の静圧 p_0 に対する圧力振動成分であるから、電気回路のアースに相当するのは外部圧力となる。よって、音響コンプライアンスは、図 4 に示すように、常にアースに接続された状態になる。

3 音響抵抗

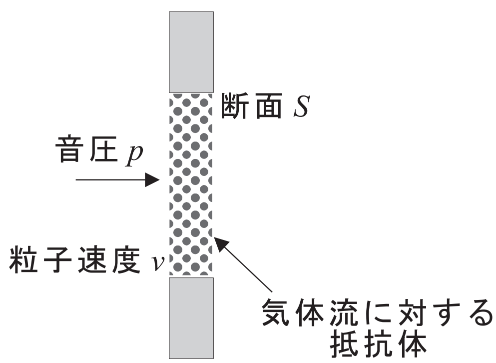

図 5: 抵抗に対応する音響素子

一般的に音響抵抗は、図 5 に示すような、空気の流れを妨げる成分 (例えば繊維のようなもの) を入れた小窓のことを指す。このとき、抵抗力 rv が、音圧による力 pS と釣り合うことから、体積速度 u を用いて、

$$p = \frac{r}{S^2} u \tag{17}$$

という関係が得られる。このときの $\frac{r}{S^2}$ が音響抵抗である。

一方、図 1 のような細管を気体が通るとき、Hagen-Poiseuille の法則より、

$$u = \frac{\pi r^4}{8\eta l} p \tag{18}$$

という関係がある。ここで、r は管の半径、l は管の長さ、η は空気の粘性係数である。従って、$8\eta l/\pi r^4$ という抵抗成分が生じる。このとき、イナータンス成分は $1/r^2$、抵抗成分は $1/r^4$ にそれぞれ比例することから、管が細くなるほど抵抗成分が支配的になる。

4　ヘルムホルツ共鳴

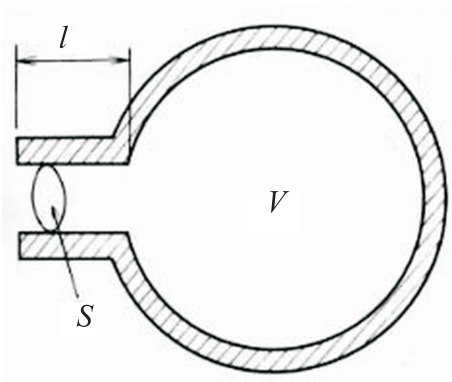

図 6: ヘルムホルツ共鳴器

これら音響素子を使用した共振系を考える。図 6 はヘルムホルツ共鳴器と呼ばれる音響系である。口径面積 S の細管の先に、体積 V の空洞を持つ。

抵抗成分を考えない場合、細管部の空気が一体となって動くことによる慣性力と、空洞内の空気による弾性力とが、断面積 S の口径を圧力 p で押す力とつり合うので、

$$p = \frac{\rho l}{S}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\rho c^2}{V}\int u\ \mathrm{d}t \tag{19}$$

(20)

となる。

等価回路で考えた場合、これは図 7 に示す L-C の共振回路に他ならない。このときのインピーダンスは、周波数 ω を使って、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{j}(\omega m_A - \frac{1}{\omega C_A}) \\ &= \mathrm{j}(\frac{\omega\rho l}{S} - \frac{\rho c^2}{\omega V}) \end{aligned} \tag{21}$$

このインピーダンスが 0 になるとき、すなわち、微小な圧力 p に対して体積速度 u が無限大となるときが

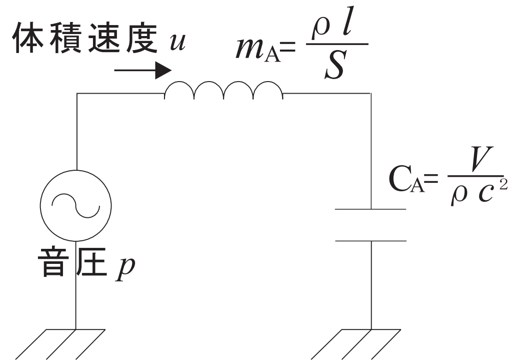

図 7: ヘルムホルツ共鳴器等価回路

共鳴するときであり、これを満たす周波数は、

$$\begin{aligned} f(=\omega/2\pi) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{m_A C_A}} \\ &= \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV}} \end{aligned} \tag{22}$$

として与えられる。

ビール瓶の口に息を吹きかけた際に共鳴する現象は、正にこの共鳴器であり、上記の周波数で共鳴が起こっている。

このような問題は、一から運動方程式等を立てることによっても解くことが出来る。しかし、上記のような等価回路になっていること、またそのときの L, C に対応するイナータンスとコンプライアンスの形を知っていることにより、より簡単に共振条件を求めることが可能になる。

なお、この等価回路による解法は、音響素子のサイズが波長に対し十分小さく、音響素子内で空気が一体となって動作するときにのみ使えることに注意が必要である。これは回路の世界における、集中定数系と分布定数系の違いに似ており、今回考えているのはあくまで集中定数として見えるときの場合である。

5　音響低域通過フィルタ

細管と容器を用いて、フィルタを作成することを考える。先述のように、十分細い管であれば、イナータンス成分よりも抵抗成分が支配的になるので、図 8(a) のような構成で低域通過フィルタを作成できる。

このときの等価回路は図 8(b) のようになる。この

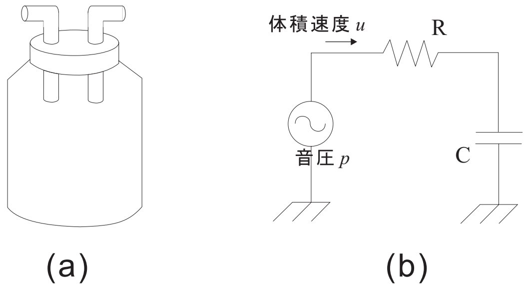

図 8: 音響素子により構成された低域通過フィルタ。(a) 実際の構成、(b) 電気系における等価回路

等価回路の入力端電圧を V_0 とすると、

$$i = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{23}$$

$$V_0 - V = Ri \tag{24}$$

より、音響系での圧力に対応する、A 点での出力電圧は、

$$CR\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V = V_0 \tag{25}$$

という微分方程式を解くことにより求められる。この解は、

$$V(t) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \tag{26}$$

であるから、ステップ入力に対し、時定数 RC で決まる時間遅れをもって変化する。

参考資料

[1] 三井田 惇郎: “音響工学,” 昭晃堂, 1987.