

## 第2章 部分空間法によるパターン識別

<http://www.hapis.k.u-tokyo.ac.jp/>  
 hiroyuki\_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

## パターン識別の手法

1. テンプレートマッチング法
2.  $k$ -最近傍識別法
3. 部分空間法
4. 識別関数の最適化による方法
5. 決定木による方法
6. ニューラルネットワークによる方法

\* 統計科学のフロンティア6  
 パターン認識と学習の統計学 新しい概念と手法  
 麻生英樹 津田宏治 村田昇  
 岩波書店

## 1. テンプレートマッチング法

テンプレート  $t(i, j)$  と入力パターン  $p(i, j)$  の合致度を評価する (パターンは2次元でなくてもよい)。典型的には合致度を相関

$$C(m, n) \equiv \sum_{i, j} p(i, j)t(i-m, j-n)$$

で評価する。テンプレートを入力画像上でスキャンして最も合致度の高い場所  $(m, n)$  を探す

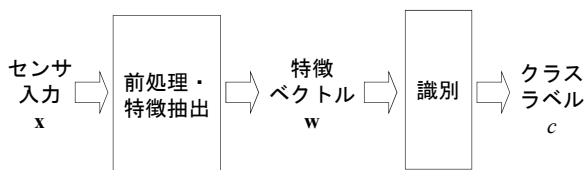
2.  $k$ -最近傍識別法

学習データをそのまま記憶しておく。  
 入力  $x$  に近い順に  $k$  個をとり、その中で最大派閥となっているクラスをもって識別結果とする。

## 部分空間法

入力ベクトルをある部分空間に射影する。その部分空間を特徴空間として識別を行う。

(再出) パターン認識の流れ



## 本章で扱うパターンベクトルと応用シーン

○ ほぼ同じ大きさに写った顔 (正面) 画像から個人を特定する。背景は共通で、明るさも揃っている。

## 応用例

- ・ インターフォンを覗き込む人の顔から個人を特定する
- ・ 画像から顔部分を切り出し、正規化処理を行ったものについて本手法を適用する。



## ○ 画像認識のための特徴空間の例

1. 目、鼻、口、などの特徴点の相対位置ベクトル
2. 色
3. 特徴点が決まった位置にくるように位置あわせした画像を対数座標表示に変換したもの  
→ 「回転、拡大」がシフトになる
4. 種々の統計量  
分散、高次相関、エントロピー、・・・
5. 部分空間
6. 輪郭線
- 
- 

## 固有顔 (eigen face) による顔識別 (部分空間法の一つ)

顔画像  $\mathbf{x}(i) = (x_1(i), x_2(i), \dots, x_N(i))^T$   $N$ : 全画素数

$\mathbf{x}(i)$  を少数の固有顔  $\mathbf{e}_i$  の線形和で近似表現

$$\mathbf{x} \approx w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + \dots + w_L \mathbf{e}_L$$

( $w_1, w_2, \dots, w_L$ ) を特徴空間とする

- ・ 「固有顔」とは？
- ・ 「近似表現」の方法は？

## 固有顔とは？

(平均値を差し引いた) 顔画像の共分散行列

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \begin{pmatrix} x_1(i) \\ \vdots \\ x_N(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(i), \dots, x_N(i) \end{pmatrix}$$

の固有ベクトル。特に固有値の大きい方から順に  $L$  個を選択したもの。

## 近似表現の方法

$$w_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

によって係数  $w_i$  を決定する。(ただし  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$  とする)

≡ 「 $\mathbf{x}$  を部分空間  $U = \{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_L\}\}$  に射影する」

## 本章の目的

1. パターン認識における部分空間法の位置づけを理解する。
  - ・ 入力ベクトルを、それよりはるかに低い次元の空間  $U$  に射影し、それを特徴ベクトルとして認識を行う
2. 共分散行列、固有値について一般的な意味を理解する。
3. 部分空間法を行うことの意義を理解する。
  - ・ 高い認識能力が得られる条件を正確に理解する
  - ・ 他のメリット：計算量の節約

ここからスライド23までは、固有顔による顔認識を理解するための数学的基礎を説明

## (分散)共分散行列

データ:  $\mathbf{p}(i) = (p_1(i), p_2(i), \dots, p_N(i))^T$   $i = 1, 2, \dots, M$

平均:  $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{p}(i)$

偏差:  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{p}(i) - \boldsymbol{\mu}$

共分散行列 (covariance matrix):

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & & r_{NN} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \begin{pmatrix} x_1(i) \\ \vdots \\ x_N(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(i), \dots, x_N(i) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\mathbf{p}(i) - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{p}(i) - \boldsymbol{\mu})^T$$

# 主成分分析

13

$N$ 次元ベクトル  $x(i)$  の分布の主成分

共分散行列の最大固有値  $\lambda_1$   
 対応する固有ベクトル  $e_1$  ( $\|e_1\|=1$ )

第1主成分

→  $x$  の  $e_1$  方向 (主軸) 成分

$$x \cdot e_1 = x_1 e_{11} + x_2 e_{21} + \dots + x_N e_{N1}$$

( $e_{i1} : e_1$  の第  $i$  成分)

第  $j$  主成分

→  $j$  番目に大きい固有値に対応する方向の成分

# 主成分分析の例 ~ アンケート結果の分析

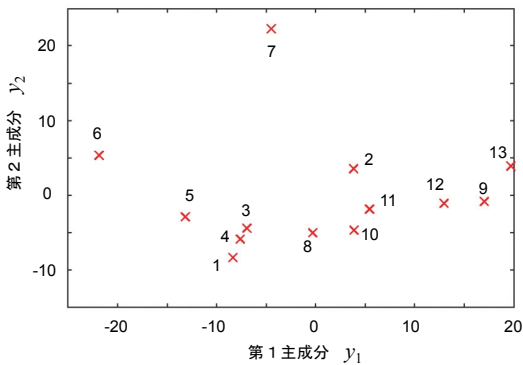
14

A(ユニーク), B(研究開発), C(宣伝広告), D(製品の質),  
 E(近代的), F(安定性), G(伝統), H(よい印象がない)

メーカー\イメージ	A	B	C	D	E	F	G	H	計
IBM	1	18	2	4	11	4	10	1	51
HP	3	5	8	7	9	3	3	11	49
東芝	3	4	4	14	1	9	13	2	50
NEC	1	9	2	10	5	11	10	2	50
日立	2	12	5	3	3	2	21	2	50
三菱	1	1	1	2	1	8	31	5	50
三洋	4	0	1	1	2	6	9	27	50
シャープ	8	10	5	7	8	6	4	3	51
エプソン	5	4	25	9	0	2	0	6	51
キャノン	2	2	9	19	2	7	4	4	49
ドコモ	2	1	13	9	4	15	3	4	51
AU	11	2	17	9	6	1	0	5	51
Vodafone	0	1	28	3	10	0	0	9	51
計	43	69	124	97	62	74	101	81	654

# 宣伝広告・伝統 vs 印象・研究開発

15



1: IBM 2: HP 3: 東芝 4: NEC 5: 日立 6: 三菱 7: 三洋 8: シャープ 9: エプソン  
 10: キャノン 11: ドコモ 12: AU 13: Vodafone

# ポイント 1

16

多次元ベクトルの分布を、別の直交座標でながめる

1. 分散が最大となる座標軸はどのように設定したらよいか  
 $= e \cdot x$  の分散が最大となる  $e$  (ただし  $\|e\|=1$ ) はどのように与えられるか

⇒  $R$  の最大固有値に対応する固有ベクトルの方向において ( $e = e_1$  のとき)  $e \cdot x$  の分散は最大になる  
 $e_1 \cdot x$  --- 第1主成分

2.  $R$  の固有ベクトル  $e_1, e_2, \dots, e_m$  は互いに直交しており、これらに沿って設定した座標系で共分散行列を計算すると、対角行列になる (非対角成分は0になる)

# 1. の証明の骨子

17

- ①  $R$  は実対称行列である。
- ② 任意の実対称行列は対角化可能である。  
 すなわち適当な直交行列  $T$  を用いて

$$T^{-1}RT = T^T RT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{直交行列 } T \text{ に対し} \\ T^{-1} = T^T \end{array} \right]$$

となる。  $\lambda_i$  はすべて実数であり、  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$  となるようにすることができる。

$T$  の列ベクトルを  $e_i$  とすると、それらは正規直交基底をなし、

$$Re_i = \lambda_i e_i$$

をみताす。

(前スライドのつづき)

18

- ③  $T$  の列ベクトルを  $e_i$  とすると、それらは正規直交基底をなすから任意の  $e$  について

$$e = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_N e_N$$

をみたす  $a_i$  ( $\|a\|=1$ ) をみつけることができる。

- ④  $e$  に沿ったデータの分散を  $S_e \equiv \frac{1}{M} \sum_i (e \cdot x_i)^2$  とすると

$$S_e = \frac{1}{M} \sum_i (e \cdot x_i)^2 = \frac{1}{M} \sum_i e^T x_i x_i^T e = e^T R e$$

ここで  $e = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_N e_N$  とすると

$$S_e = (\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_N a_N^2) \quad [e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \text{ より}]$$

$$\leq (\lambda_1 a_1^2 + \lambda_1 a_2^2 + \dots + \lambda_1 a_N^2) = \lambda_1 [ \|a\|=1 \text{ より} ]$$

$a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_N = 0$  のとき、等号が成立。

2. 座標変換の考え方

19

$T\mathbf{y} = \mathbf{x}$      $\mathbf{x}$ : 元の座標系  $S_0$  での点の表記  
 $\mathbf{y}$ : 同じ点を新座標系  $S_n$  で表記したもの

$T$  の列ベクトルは、新座標  $S_n$  の軸に沿った単位ベクトルを元座標  $S_0$  で表記したものである。このことを確認せよ。

問い

新座標において計算した共分散行列  $R'$  と旧座標において計算した共分散行列  $R$  との関係を求めよ

答え

20

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{y}\mathbf{y}^T \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T^T \mathbf{x}(T^T \mathbf{x})^T \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T T \\ &= T^T \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}\mathbf{x}^T \right) T \\ &= T^T R T \end{aligned}$$

$R$  を対角化できる  $\iff$   $R'$  が対角行列になるような座標系を選択できる

(2. 座標変換の考え方 つづき)

21

ベクトル  $\mathbf{x}$  を、共分散行列の固有ベクトルに平行な座標系  $S_n$  で表記すると、その表記における共分散行列は

$$R' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad R \text{ の固有値}$$

のように与えられる。

問い

22

- (1) 対称行列の固有値、固有ベクトルと対角化の関係性を述べよ。
- (2)  $R$  を対角化する直交行列  $T$  の各列はどのようなベクトルになっているか。「固有ベクトル」および「座標変換」という2つの観点から説明せよ。

ポイント2

23

- 固有値問題は多くの分野に共通して現れる問題
- 固有値、固有ベクトルを求める高速アルゴリズムが存在する

部分空間法によるパターン認識 (詳細)

24

例: 顔画像  $\mathbf{x}(i) = (x_1(i), x_2(i), \dots, x_N(i))^T$      $N$ : 全画素数

複数の顔画像から  $\rightarrow$  共分散行列から主軸を抽出  
 共分散行列をつくる



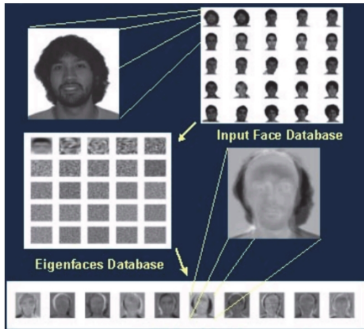
少数の主軸成分のみで顔を表現

各固有ベクトルの寄与率  $\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^N \lambda_j}$

## 固有顔 (eigenface) による顔識別

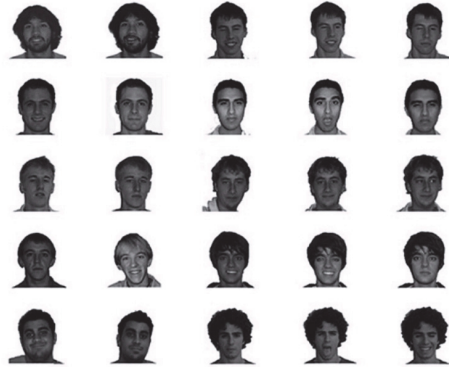
25

M. A. Turk and A. P. Pentland  
Face Recognition Using Eigenfaces  
Proc. of Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 586-591, 1991



## 顔画像データ 各人につき複数枚

26



<http://cnx.rice.edu/content/m12531/latest/>

## 平均顔

27

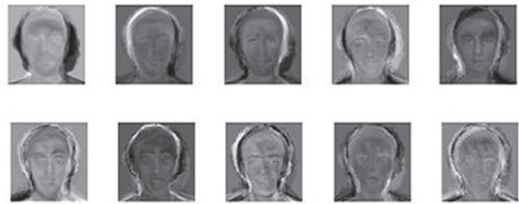
$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{p}(i) \quad M: \text{顔画像データの総数}$$



<http://cnx.rice.edu/content/m12531/latest/>

## 上位 10 個の固有顔 ( $R$ の固有ベクトル) 例

28



## 顔識別アルゴリズムの具体例

29

- 全ての顔データ (総数  $M$ ) につき、平均顔を差し引いた  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{p}(i) - \mu$  を準備する。
- 全データを用いて  $\mathbf{x}(i)$  の共分散行列  $R$  を計算する。  
 $R$  の固有ベクトルのうち、固有値が大きい順に  $L$  個を選択する。  
 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_L$  の張る空間を「顔空間  $U$ 」とよぶこととする。
- 全ての顔データ  $\mathbf{x}(i)$  について  $U$  への射影を算出しておく。  
すなわち  $M$  個の  $L$  次元重みベクトル  $\mathbf{w}$  を算出しておく。  
$$\mathbf{w}(i) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}(i), \dots, \mathbf{e}_L \cdot \mathbf{x}(i))^T$$

## 顔識別アルゴリズムの一例 つづき

30

- 入力された画像  $\mathbf{x}_{\text{new}}$  に対し、同様な重みベクトル 
$$\mathbf{w}_{\text{new}} = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}_{\text{new}}, \dots, \mathbf{e}_L \cdot \mathbf{x}_{\text{new}})^T$$
 を算出する。
- $\mathbf{w}_{\text{new}}$  に最も近い  $\mathbf{w}(i)$  を探す。(最近傍決定則)

## 問題

$\|\mathbf{w}_{\text{new}} - \mathbf{w}(i)\|$  と、 $\|\mathbf{x}_{\text{new}} - \mathbf{x}(i)\|$  はどのような関係にあるか

## 固有顔計算のテクニック

31

顔画像の共分散行列

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \begin{pmatrix} x_1(i) \\ \vdots \\ x_N(i) \end{pmatrix} (x_1(i), \dots, x_N(i)) = AA^T$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(M) \\ \vdots & & \vdots \\ x_N(1) & & x_N(M) \end{pmatrix}$$

○  $N$  は非常に大きい  
( $N \gg M$ )

↓  
 $R$  は巨大な行列

## 固有顔計算のテクニック つづき

32

1.  $R = AA^T$  のかわりに  $L = A^T A$  の固有値  $\lambda_i$ 、固有ベクトル  $\mathbf{e}_i$  を求める。

$$A^T A \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$$

2.  $\lambda_i$  およびベクトル  $A \mathbf{e}_i$  は、それぞれ  $AA^T$  の固有値および固有ベクトルである\*。

証明:  $A^T A \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$  より

$$(AA^T) A \mathbf{e}_i = \lambda_i A \mathbf{e}_i$$

\*  $AA^T$  のランクは  $M$  以下であるから、 $i > M$  において  $\lambda_i = 0$

## 部分空間法の有効性

33

1. 計算時間、記憶領域の節約
2. 識別能力の向上

データが以下の性質をもつとき、識別能力の向上が期待できる

1. 各データごとにみると、部分空間  $U$  に含まれない成分 (空間  $U^\perp$ ) のエネルギー\*は大きい。
2. 空間  $U^\perp$  内において、同一人物のデータ間変動は、個人間の変動に比して小さくない。

\* データを  $\mathbf{e}_i$  で展開したときの  $\mathbf{e}_{L+1}, \dots, \mathbf{e}_N$  の係数の2乗和 = 部分空間  $U^\perp$  に射影した画像の各画素値の2乗和

## Fisher の線形判別法 (R. A. Fisher, 1936 年)

34

例: 固有顔による判別

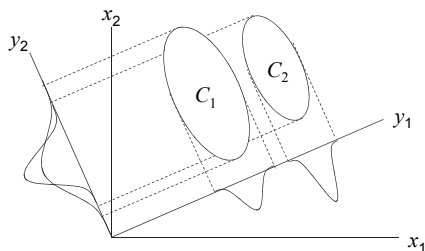
→ 全サンプルについて、最も分散の大きくなる軸が判別のために最良の軸とは限らない

Fisher の判別基準

クラス間分散  $\sigma_B^2$  のクラス内分散  $\sigma_W^2$  に対する比

$$r = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2}$$

が最大となる方向に射影する



クラス  $C_1, C_2$  を判別するためには、 $y_2$  よりも  $y_1$  軸に射影した方が賢明である

(注) この考えが常に正しいわけではない

## 射影軸の決定方法

36

クラス間 共分散行列

$$R_B = \frac{1}{K} \sum_{c=1}^K (\boldsymbol{\mu}_c - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}_c - \boldsymbol{\mu})^T$$

$K$ : クラスの数

$\boldsymbol{\mu}$ : 全データの平均

$\boldsymbol{\mu}_c$ : クラス  $c$  内の平均

クラス内 共分散行列

$$R_W = \sum_{c=1}^K \frac{N_c}{N} R_C \quad N_c: \text{クラス } c \text{ に属するデータ数}$$

$$R_C = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_c)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_c)^T$$

ベクトル  $\mathbf{e}$  方向の分散 (データ数  $M$ 、平均  $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\|\mathbf{e}\|=1$ )

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{e}\}^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{e}^T (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}^T R \mathbf{e}\end{aligned}$$

→  $\frac{\mathbf{e}^T R_B \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T R_W \mathbf{e}}$  が最大となる  $\mathbf{e}$  を探す

$$r = \frac{\mathbf{e}^T R_B \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T R_W \mathbf{e}} \text{ が最大となる } \mathbf{e} \text{ を探す}$$

$$\Leftrightarrow R_B \mathbf{u} = \lambda R_W \mathbf{u} \quad (R_W^{-1} R_B \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u})$$

における最大固有値  $\lambda_1$  に対応する  $\mathbf{u}_1$  を探す

[証明]  $\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_N \mathbf{u}_N$  と展開すると、

$$r = \frac{\lambda_1 \alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_N \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N}{\alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N}$$

$\mathbf{u}_i R_W \mathbf{u}_i \geq 0$  より、 $r$  は  $\mathbf{e} = \mathbf{u}_1$  のとき  
最大値  $\lambda_1$  をとる

## 問題

$$r = \frac{\lambda_1 \alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_N \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N}{\alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N}$$

となることを示せ

## 補足

$$\begin{aligned}\lambda_1 - r &= \lambda_1 - \frac{\lambda_1 \alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_N \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N}{\alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N} \\ &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_1) \alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_N) \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N}{\alpha_1^2 \mathbf{u}_1 R_W \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_N^2 \mathbf{u}_N R_W \mathbf{u}_N} \geq 0\end{aligned}$$

$\mathbf{u}_i R_W \mathbf{u}_i > 0$  より、 $r$  は  $\mathbf{e} = \mathbf{u}_1$  のとき最大値  $\lambda_1$  をとる。

次に  $\mathbf{u}_1$  と直交する空間から  $r$  を最大化する  $\mathbf{e}$  を選択すると  $\mathbf{e} = \mathbf{u}_2$  である。以下同様。