システム情報工学演習第二　2021. 1. 5

多次元計測（3） パターンが伝送できる情報量

篠田 裕之

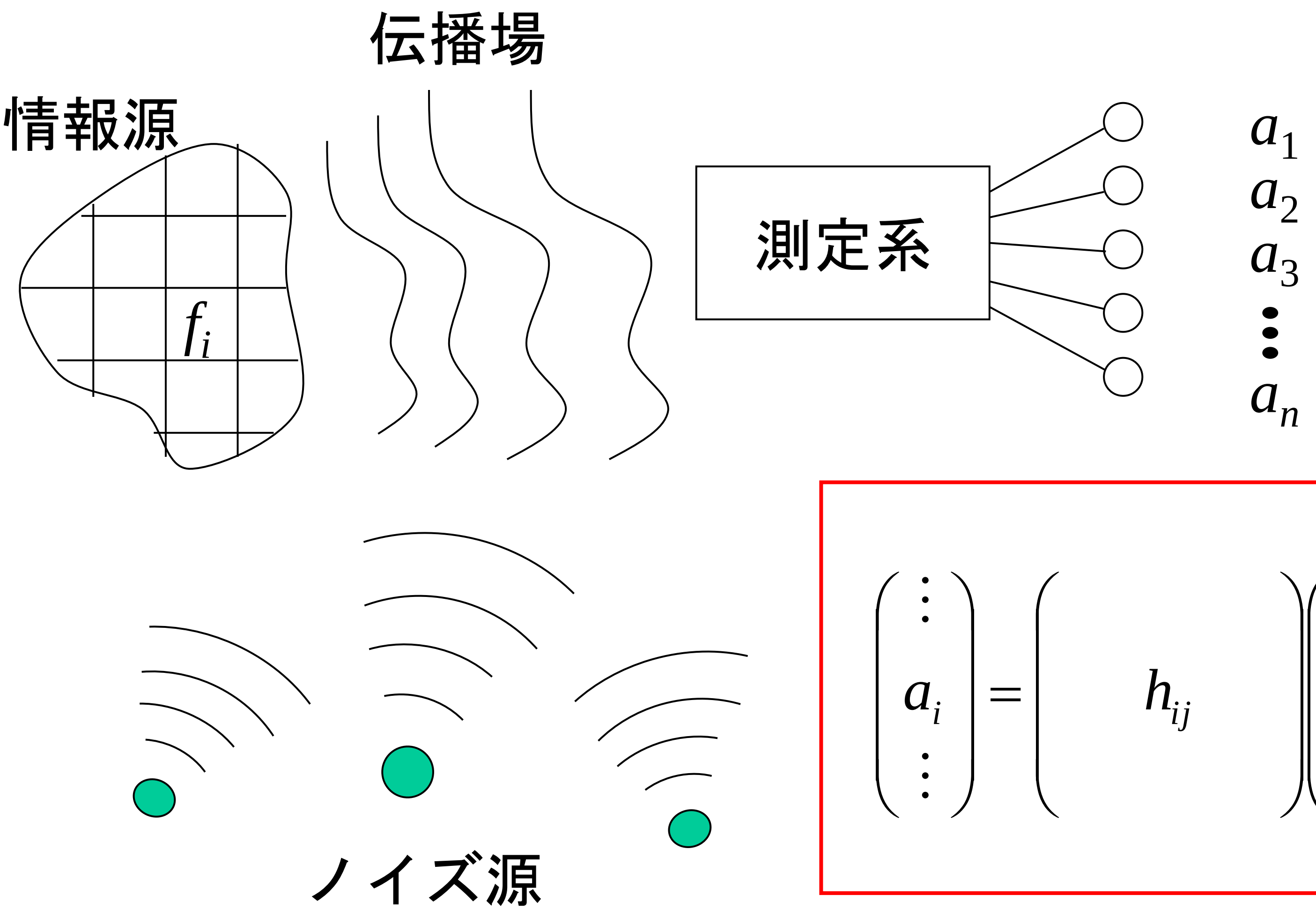
https://hapislab.org/

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

進め方

演習問題 １～４ を解答し、1/12（火） までに提出して下さい。

線形系におけるパターン計測



ノイズ

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & h_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ f_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ w_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

測定値 $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{f}$ を求める

情報量とは

ある媒体に記録可能な情報量が n ビットである

⇕

区別できる状態*が 2^n とおり存在する

ハードディスク、メモリ
本
音楽 CD
レコード？

＊各状態と事象（意味）との対応表は別途作成する

物理的に 保存できる/伝送できる/読みだせる 情報量

$$I = \log_2(\text{区別できる状態の総数})$$

対数をとる意義

・記録デバイスの数や面積に比例

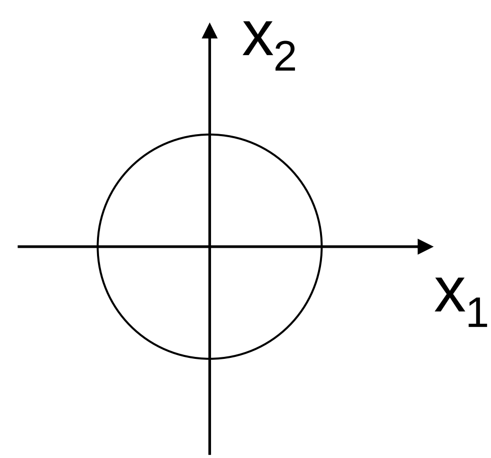
本章の目的：
アナログパターンから読み取れる情報量の理論限界を理解する

ステップ 1: 多次元空間における球は以下のように書ける

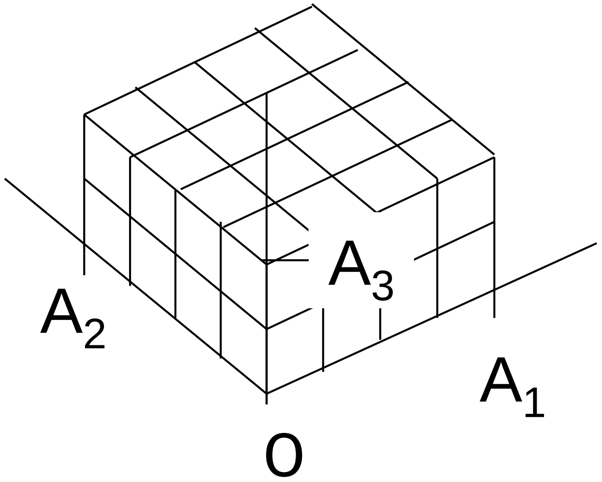
２次元 $$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

３次元 $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

n 次元 $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$$



- 信号は多次元空間中の一点である
- 多次元空間においても「体積」は定義できる



例えば n 次元空間内の領域 V

$$0 < x_i < A_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

の中に単位立方体

$$0 < x_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

は $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ 個入り、これが領域 V の体積である。

球の体積

2D πr^2

3D $\frac{4\pi}{3} r^3$

nD $A r^n$

$$A(2m) = \frac{\pi^m}{m!}$$

信号の存在範囲

$$|\mathbf{x}|^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_N^2 < S$$

U: ノイズの存在範囲

$$U = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\|^2 < W\}$$

V: 信号＋ノイズの存在範囲

$$\boxed{V = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\|^2 < S + W\}}$$

？？？

3. 誤りなく伝送可能な情報量の上限

（信号＋ノイズ）球の体積

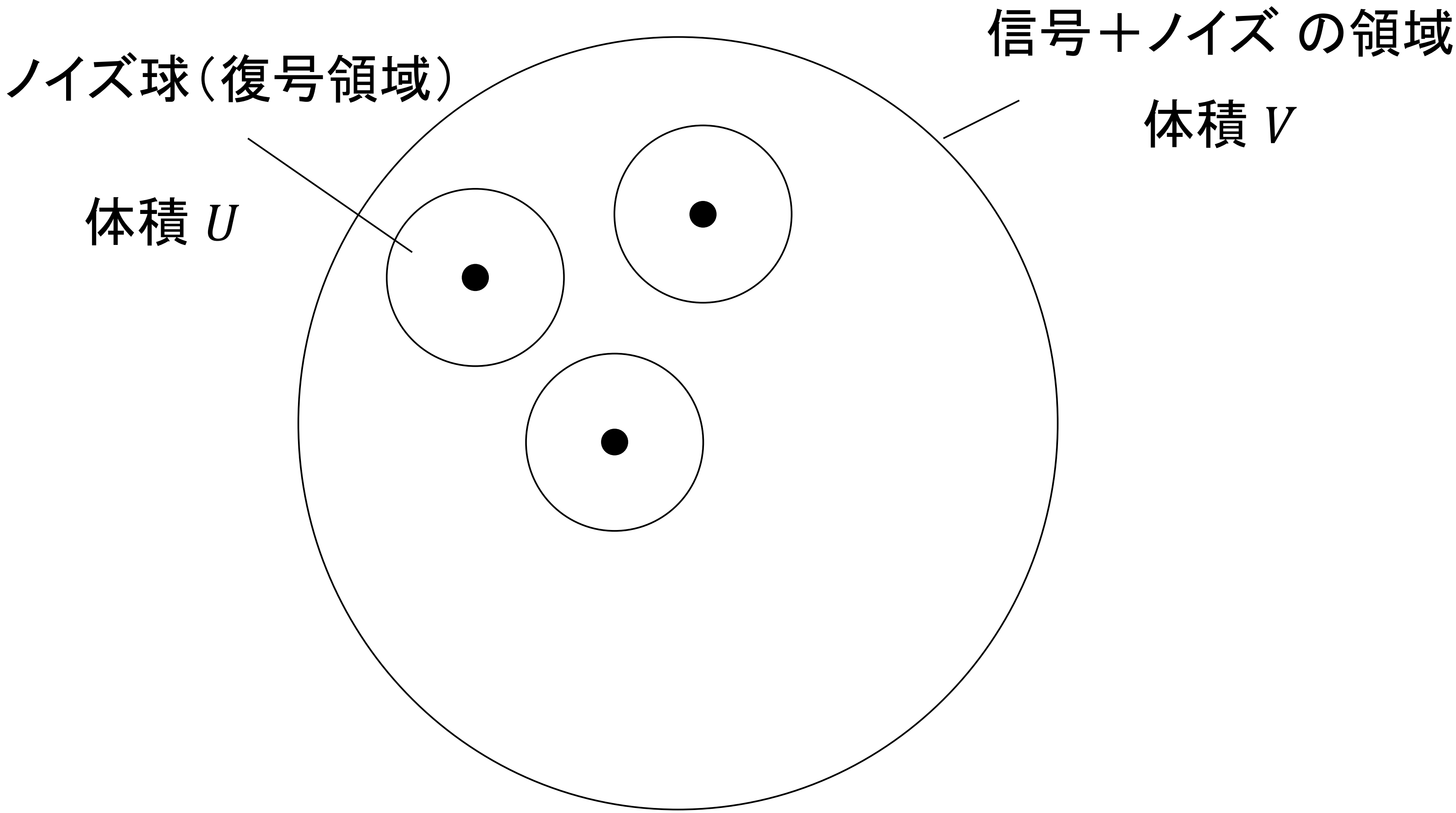
$$H = \log \frac{A(N)\sqrt{S+W}^{\,N}}{A(N)\sqrt{W}^{\,N}} = \log \sqrt{\frac{S+W}{W}}^{\,N} = \boxed{\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right)} \quad \text{ビット}$$

ノイズ球の体積

N: 信号点数
S: 信号エネルギ
W: ノイズエネルギ（白色）

○ これ以上の情報を誤りなく送ることができないことは確かだが、
この段階では本当に H ビットの情報を送れるかどうかは分からない

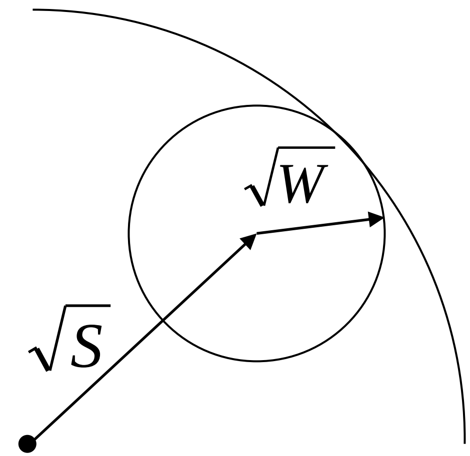
識別可能な状態数の上限 = V/U



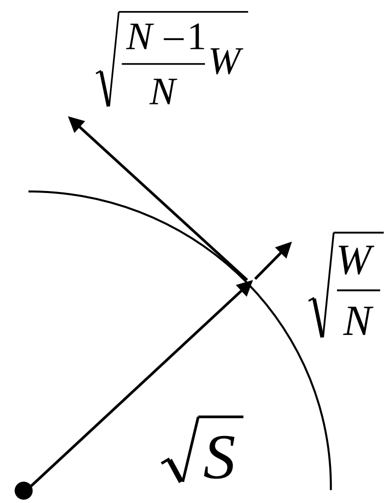
信号+ノイズの存在範囲

２次元、あるいは3次元の場合、
信号＋ノイズの点の存在する
領域は以下のように書ける。

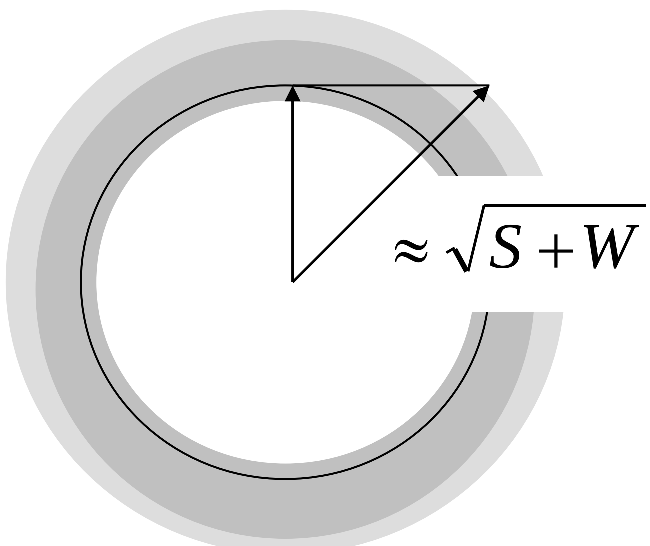
$$\left|\mathbf{x}\right|^2 < \left(\sqrt{S} + \sqrt{W}\right)^2$$



多次元空間における
信号＋ノイズの存在範囲



ノイズの大半の成分は信号と直交



補足説明: $\|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}\|^2 > S + W + \Delta$ となる確率

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}\|^2 &= \sum_{i=1}^{N}\left(s_i^2 + 2s_iw_i + w_i^2\right) \\
&= S + W + 2\sum_{i=1}^{N} s_iw_i \\
&= S + W + 2\sqrt{S}w_s
\end{aligned}
$$

w_s は $\boldsymbol{w}$ に含まれる $\boldsymbol{s}$ に平行な成分であり、
分散 W/N の標準正規分布に従う。

したがって、ほとんどの $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}$ は、

半径 $\sqrt{S+W+2\sqrt{SW/N}}$ の球と、半径 $\sqrt{S+W-2\sqrt{SW/N}}$ の球の間の空間 G にある。

上記外側球と内側球の体積比を r とすると、

$$\log r=\log\frac{\left(S+W+2\sqrt{SW/N}\right)^{N/2}}{\left(S+W-2\sqrt{SW/N}\right)^{N/2}}=\frac{N}{2}\log\frac{S+W+2\sqrt{SW/N}}{S+W-2\sqrt{SW/N}}$$

$N\to\ \infty$　のとき

$$\log r\to\ \infty,\quad \frac{1}{N}\log r\to 0$$

＊すなわち前スライドの $H/N\ \ (N\to\ \infty)$ は、上記空間 G の体積をノイズ球の体積で割ったものに置き換えても変化しない。

H の近似式

$S \ll W$ のとき

$$H = \frac{N}{2}\log\left(1 + \frac{S}{W}\right) \approx \frac{1}{2\log_{\mathrm{e}}2}\frac{NS}{W} = 0.72\frac{NS}{W}$$

$S \gg W$ のとき

$$H = \frac{N}{2}\log\left(1 + \frac{S}{W}\right) \approx \log\sqrt{\frac{S}{W}}^{N}$$

演習問題 1

$S < W$ のとき、以下の考え方で情報を伝達する。

互いに直交する m 個の関数 $\{\eta\phi_1, \eta\phi_2, \ldots, \eta\phi_m\}$ を用意し、

$$s(n) = a_1\eta\varphi_1(n) + a_2\eta\varphi_2(n) + \cdots + a_m\eta\varphi_m(n) \quad (a_i = 1 \text{ or } -1)$$

によって2進数（ m ビットの符号）を伝達する。
m がなるべく大きくなるよう、η は2状態を区別できる最小値とする。
このとき m は

$$m = \frac{S}{\eta^2} = \frac{SN}{r^2 W}$$

のように与えられることを示せ。ただし r は 1より極端に大きくない値とする。

＊この方法で伝送される情報量は m ビットである。

答

$+\eta\phi(n)$ と $-\eta\phi(n)$ を見分けるためには

$$\eta^2 > \frac{W}{N}$$

でなければならない。上記の条件を満たす場合にもある確率で誤りが発生するため、余裕をみて*

$$\eta^2 = r^2 \frac{W}{N}$$

と仮定すると、$m\,\eta^2 = S$ であるから

$$m = \frac{S}{\eta^2} = \frac{SN}{r^2 W}$$

が得られる。

＊上式の r は、1より極端には大きくない値として仮に設定した値。たとえば $r = 2.58$ に設定すると、ノイズによって1段階読み誤ってしまう確率は 1% となる。
$m = 0.72\,\frac{NS}{W}$ に相当するのは $r = 1.18$。

演習問題２

$S > W$ のとき

N 次元の空間を張る正規直交基底 $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ を用意し、各基底関数 ϕ_i に、

$$-\sqrt{\frac{S}{N}} < b_i < \sqrt{\frac{S}{N}}$$

の重みをつけ、以下のような信号を送信する。

$$s(n) = \sum_{i=1}^{N} b_i \phi_i(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

受信側は各 b_i を観測する。ここで b_i は離散的な値をとるものとし、ノイズが加算されてもそれらが正しく同定されるような間隔で設定されている。

このとき

$$\log_2 \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{S}{W}} \right)^N = \frac{N}{2} \log_2 \frac{S}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

の情報が伝達されることを示せ。ただし r は 1より極端に大きくない値とする。

答

- N 個の基底（N 点の波形）に重み b_i をつけて和をとり、
$$s(n) = \sum_{i=1}^{N} b_i \phi_i(n)$$
のように伝送する
- 各基底に割り当てるエネルギの最大値を S/N とする
- 誤りなく同定できる各基底の重み b_i の段階数は
$$\frac{2\sqrt{S/N}}{2r\sqrt{W/N}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{S}{W}} \text{ 段階}$$
- 誤りなく伝達できる信号バリエーションの数
$$\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{S}{W}}\right)^{N} \text{ 通り}$$
- OFDM と呼ばれる信号伝送方式について調べてみよう

まとめ：直交信号の組み合わせで伝達される情報量

[1] $S < W$ のとき

m 個の信号成分について、その2状態の選択の仕方で情報を伝える場合

$$m = \frac{S}{\eta^2} = \frac{SN}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

[2] $S > W$ のとき

N個の各基底成分に最大エネルギー $\dfrac{S}{N}$ を分配し、その強度を読み取る場合

$$\log_2 \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{S}{W}} \right)^N = \frac{N}{2} \log_2 \frac{S}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

演習問題３

$S < W$ の場合に、前述の方法にかえて

ϕ_i の信号振幅をノイズ振幅(ϕ_i に平行な成分の振幅)の $2k+1$ 倍とし、（その分 m は減る）それぞれが $2(k+1)$ 段階の強度を伝達すると、伝送可能な情報量はどうなるか？

答

信号エネルギが一定であれば、
同時に送れる直交信号の最大数 m' は

$$m' = \frac{1}{(2k+1)^2} m$$

したがって、伝送可能な情報量は

$$\log_2 (2k+2)^{m'} = \frac{1}{(2k+1)^2} m \log_2 (2k+2) \quad \text{ビット} \quad < m$$

＊この結果から何が言えるか？

演習問題 4

ある生物が体液中の3種類の化学成分濃度 (x_1, x_2, x_3) [%] を自律的に変化・保持させることにより一種の記憶動作を行っているものとする．体内にはそれらの濃度に対して

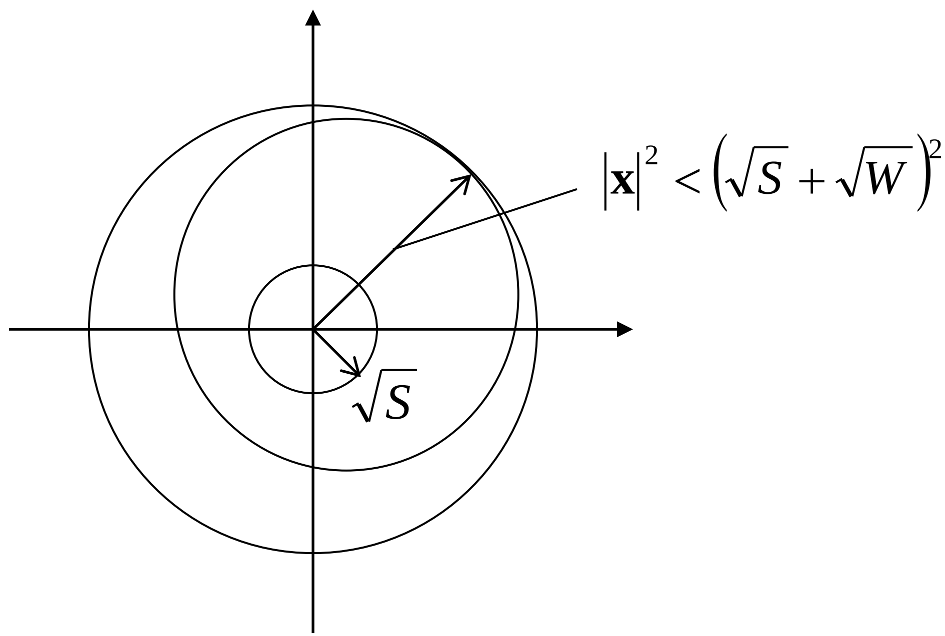
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように (y_1, y_2, y_3) を出力する3種類のセンサがあり，感覚系の上位機構は (y_1, y_2, y_3) の各成分値を ± 0.1 程度の精度で検出できるものとすると，この記憶系が一回の動作で記録可能な情報は最大何ビットか？

なおx_i は $0 < x_i < 10$ なる範囲の値を自由にとることができるものとし，各成分の読み取り誤差間に相関は無いものとする．

参考: 多次元空間の分割

低次元で考察すると、Ｓ＜Ｗの場合、１ビットも伝送できないように感じられる。



高次元での球　1

次元が大きくなると事情が変わる

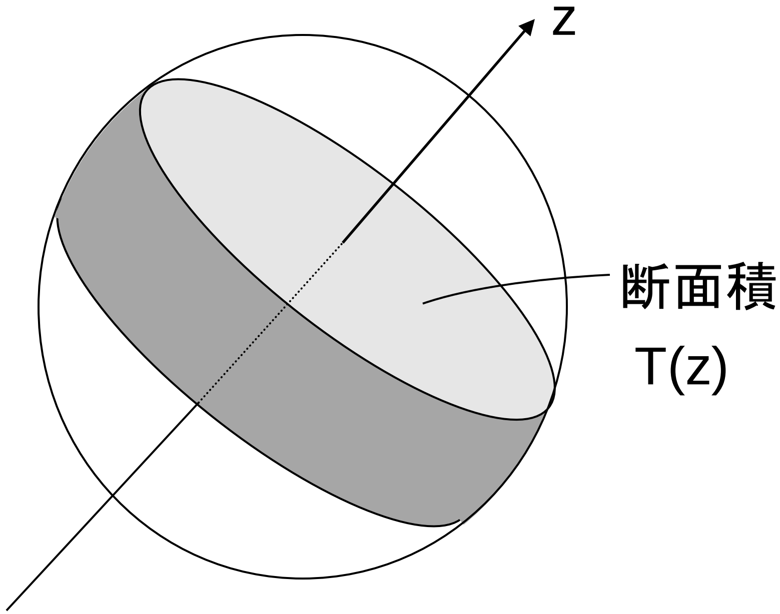
球の体積の大部分が表面近くにある

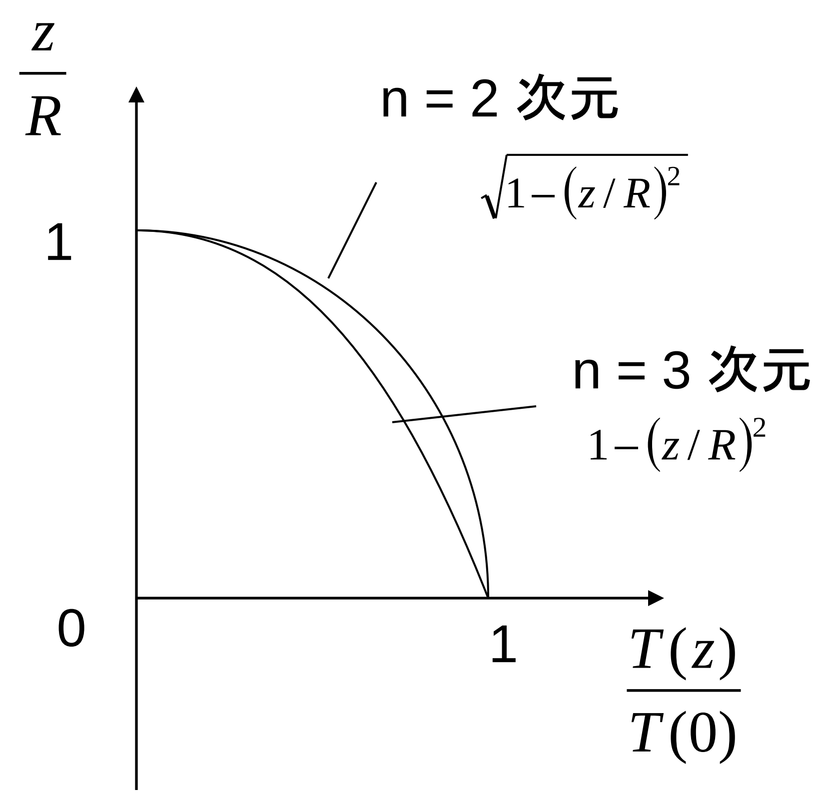
$$\frac{\text{半径}0.99\text{の球の体積}}{\text{半径１の球の体積}} = 0.99^n$$

$$0.99^{300} = 0.05$$

高次元での球 2

体積の大部分が赤道近くにある



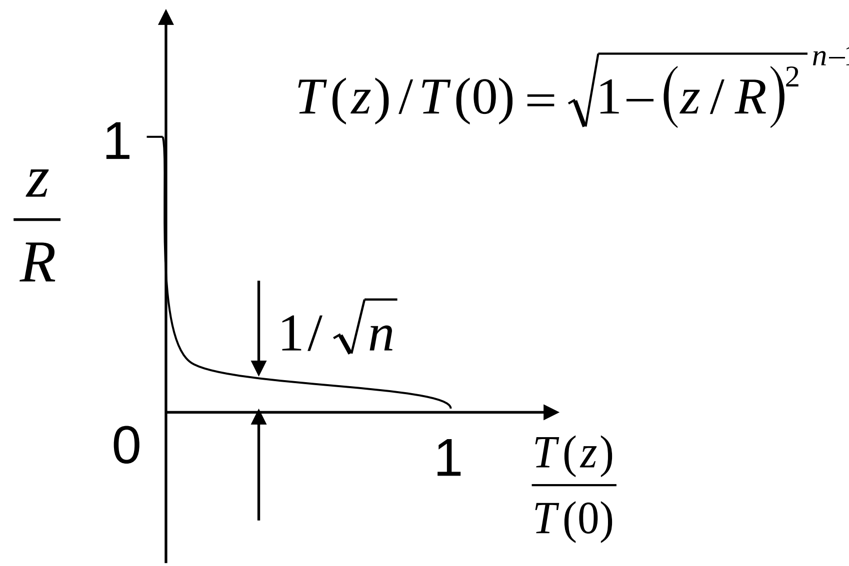


n 次元球の断面積の大きさ

原点から距離 z 離れた n-1 次元平面による断面積

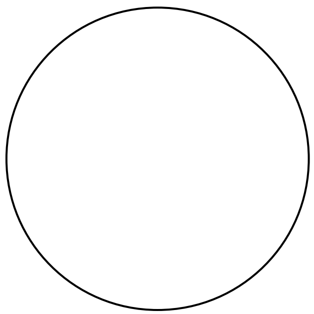
＝半径 $\sqrt{R^2 - z^2}$ の n-1 次元球の体積

$$= AR^{n-1}\sqrt{1 - z^2/R^2}^{\,n-1}$$



球と立方体の体積

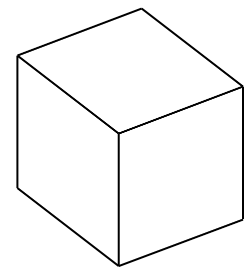
半径 R の球



$$V = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!} R^N \quad (N\text{: 偶数})$$

$$\log V = N \log_e R - \frac{N}{2} \log_e \left(N / 2\pi e \right)$$

一辺 $\dfrac{R}{\sqrt{N/2\pi e}}$ の立方体



$$V = \frac{R^N}{(N/4\pi e)^{N/2}}$$

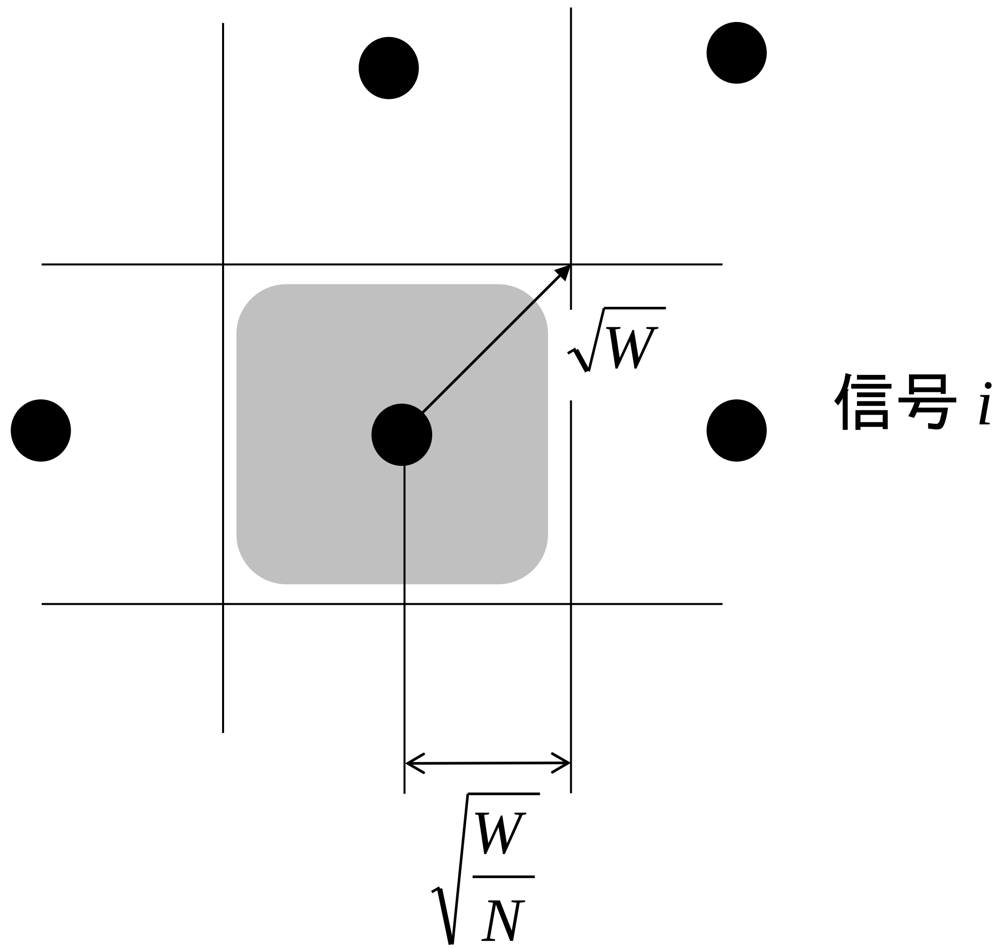
$$\log V = N \log_e R - \frac{N}{2} \log_e \left(N / 2\pi e \right)$$

$\Longleftrightarrow$

対数をとると等しい

直交格子による分割

- 隣の信号までの距離を $(W/N)^{1/2}$ 程度まで近づけてもノイズ球の重なりの体積は小さい



（信号＋ノイズ）の存在範囲の体積

$$\log \frac{A(N)\left(\sqrt{S+W}\right)^N}{\left(\alpha\sqrt{\frac{W}{N}}\right)^N} = \log\sqrt{\frac{S+W}{W}}^N = \boxed{\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right)}$$

一辺 $\alpha\sqrt{\frac{W}{N}}$ の多次元立方体の体積

$\alpha = \sqrt{2\pi e} = 4.13$ とすると

半径 $\sqrt{W}$ の球の体積に等しい

今回のまとめ

パターン **x** から読み取れる情報量は，　**x+w** が動き得る空間をノイズ領域で分割した個数で評価できる．