

回路学第一

第5章

オペアンプの応用回路

計数工学科 篠田裕之

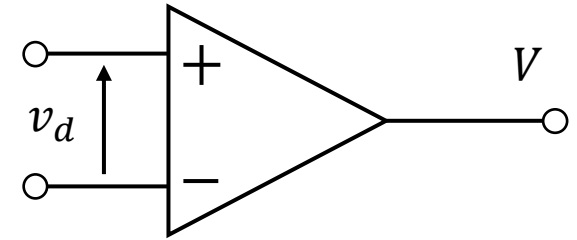
<http://www.hapis.k.u-tokyo.ac.jp/>

回路学第一 講義内容

1. 回路とは？ 何を学ぶのか？
2. 物理とシステムをつなぐ「等価回路」
3. 線形システム・電力・電源
4. 増幅回路とオペアンプ
5. オペアンプの応用回路
6. スイッチング回路とその応用
7. DA変換器とAD変換器
8. 共振回路、フィルタ、変復調回路

オペアンプ (OP アンプ)

operational amplifier, Op Amp, 演算増幅器



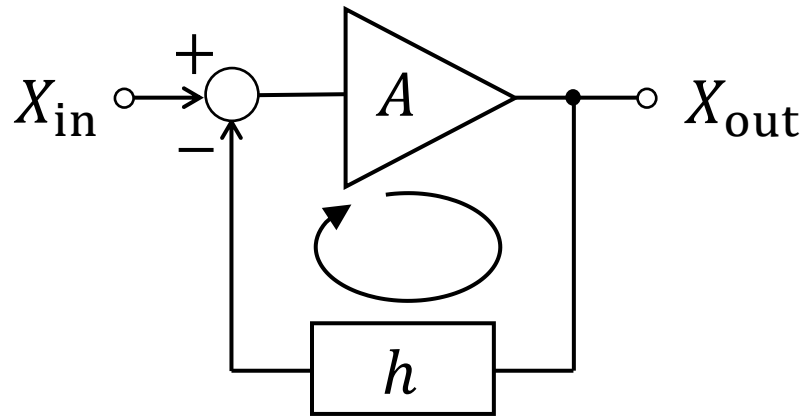
理想オペアンプの特性

差動利得	無限大 (正負入力端子間の電圧 v_d と出力電圧 V の比 $a = V/v_d$ が無限大)
同相利得	ゼロ (差電圧 $v_d = 0$ である限り、入力端子電圧が変動しても出力 $V = 0$)
入力インピーダンス	無限大 (正負入力端子に電荷が流出入することがない)
出力インピーダンス	ゼロ (いくらでも多くの電流が流せる)
周波数帯域	無限大
内部雑音	ゼロ

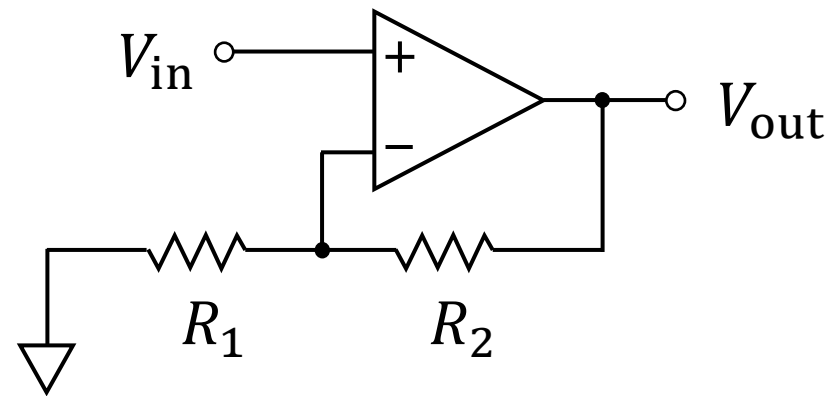
* 直流電圧源に接続されて動作しているが、その配線は省略している

オペアンプを用いたフィードバック回路

抽象化された表記



非反転増幅器



$$X_{\text{out}}(s) = A(s)(X_{\text{in}}(s) - h(s)X_{\text{out}}(s)) \text{ より}$$

$$X_{\text{out}}(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)h(s)} X_{\text{in}}(s)$$

* 上の例において h と (R_1, R_2) の関係を求めよ

フィードバック回路の安定性、発振

➤ これからやろうとしていること

オペアンプの出力をオペアンプ入力端子にフィードバックすると、外部からの入力が無くても回路システム内に電流・電圧が発生し、それが時間的に増大していく可能性がある。

このようなことが起こる必要十分条件を求めたい。また不安定性の回避法を見つけたい。

→ 制御理論における「安定性の判別」と「利得余裕、位相余裕」

どうやって判別するか？

- 線形回路素子 (R, L, C) と線形 (かつ十分大きい有限な) 増幅特性をもつオペアンプで構成されることを仮定する。
 - 回路要素の入出力関係は一般に非線形であるが、微小変化については線形とみなせる。
- 振幅が時間とともに指数関数的に増大していく解が存在するかをチェックする。そのような解が全く存在しなければ安定。一つでも存在すれば不安定。
 - 指数関数的でなく、かつ値が増大していく解は存在しないのですか？

皆さんにとってどちらが考えやすいですか？

1. 電流 $i(t)$ や $v(t)$ をそのまま使うのではなく、それをラプラス変換した $I(s), V(s)$ で回路方程式をたてる。

関数 $f(t)$ のラプラス変換：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$


2. 電流や電圧の時間変化が全て $\exp(st)$ (s は時間によって変化しない複素数) に比例しているものと仮定して回路方程式をたてる。


→ この仮定が妥当であるかの検証は後で行う。

→ ラプラス変換を使うと厳密な理解が容易になる。

前スライドの1と2は、大きく異なる考え方。
 しかしどちらを採用しても回路方程式は同じになる。

抵抗 R  $V = RI$

静電容量 C  $sCV = I$
 $V = \frac{I}{sC}$

インダクタンス L  $V = sLI$

← キャパシタの
 初期電荷については
 別途考察することとし、
 I と V の関係が線形
 な場合に限定

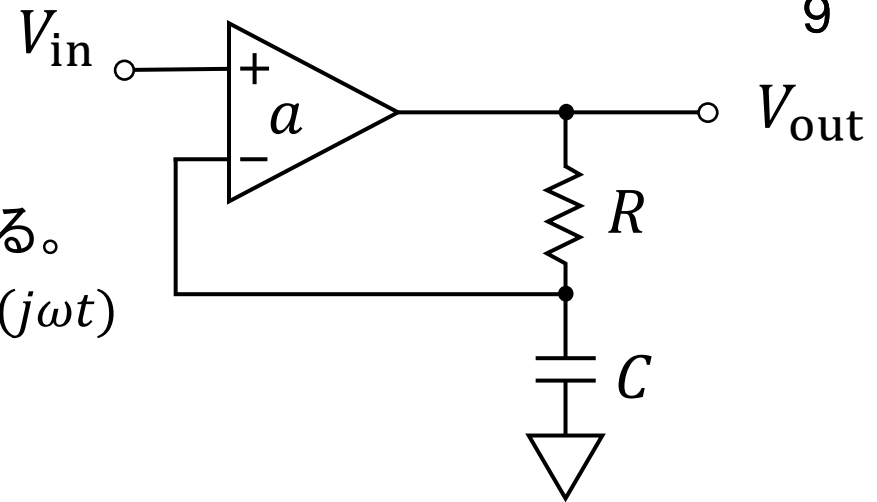
準備

オペアンプの差動利得 a を実数定数とする。

$v_{in}(t) = V_{in} \exp(j\omega t)$ 、 $v_{out}(t) = V_{out} \exp(j\omega t)$

として、入出力の関係を定式化しよう。

回路は安定であると仮定する。



$$V_{out} = a \left(V_{in} - \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} V_{out} \right) = a \left(V_{in} - \frac{1}{1 + j\omega CR} V_{out} \right)$$

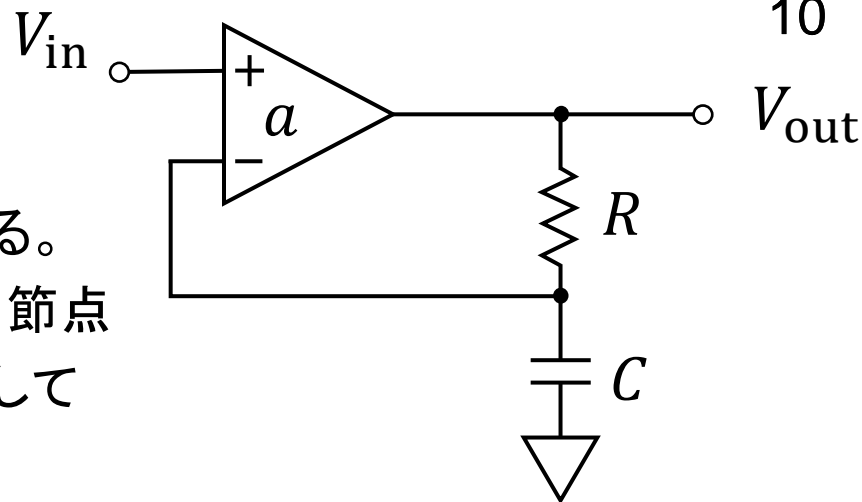
これを解くと

$$V_{out}(j\omega) = \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + j\omega CR}} V_{in}(j\omega) = \frac{a(1 + j\omega CR)}{1 + j\omega CR + a} V_{in}(j\omega)$$

(a が十分大きい場合) $\omega CR \ll 1$ では電圧フォロアであり、 $\omega CR \gg 1$ では微分回路となる。

安定性の判別

オペアンプの差動利得 a を実数定数とする。
 $v_{in}(t)$ 、 $v_{out}(t)$ をはじめ、全ての枝電流、節点電圧が $\exp(st)$ に比例すると事前に仮定して回路方程式を立てると、



$$v_{out} = a \left(v_{in} - \frac{1}{Cs} \cdot \frac{1}{\frac{1}{Cs} + R} v_{out} \right) = a \left(v_{in} - \frac{1}{1 + CRs} v_{out} \right)$$

これを解くと

$$V_{out}(s) = \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + CRs}} V_{in}(s) = \frac{a(1 + CRs)}{1 + CRs + a} V_{in}(s)$$

「伝達関数」
 $s = j\omega$ とすると、
 各周波数における入出力の関係
 になっている

$s = -\frac{a+1}{CR}$ のとき、 $V_{in}(t) = 0$ でも回路内に電流・電圧が発生しうることになるが、 $a + 1 > 0$ のとき $\text{Re}[s] < 0$ なので、時間の経過とともに消失する。
 もし $a + 1 < 0$ とすると、 $\text{Re}[s] > 0$ となり、 $V_{in}(t) = 0$ であっても時間の経過とともに増大する解が存在することになり、不安定なシステムであることを意味する。

フィードバック回路の安定性判別(おおもとの理論)

V_{in} から V_{out} (アンプ出力) への伝達関数の極の実部がすべて負であることが、回路が安定であることの必要十分条件

(もう少し説明すると) 線形アンプと線形回路素子からなるフィードバック回路の伝達特性は、 s の多項式 $f(s)$ 、 $g(s)$ を用いて

$$V_{out}(s) = \frac{f(s)}{g(s)} V_{in}(s)$$

のように書かれる。このとき $g(s) = 0$ を満たす s の実部が全て負であれば安定。

$V_{in}(s)$ 、 $V_{out}(s)$ は、 $v_{in}(t)$ 、 $v_{out}(t)$ のラプラス変換と考えてもよいし、 $v_{in}(t) = V_{in}(s)\exp(st)$ のように $\exp(st)$ の係数であると考えてもよい。

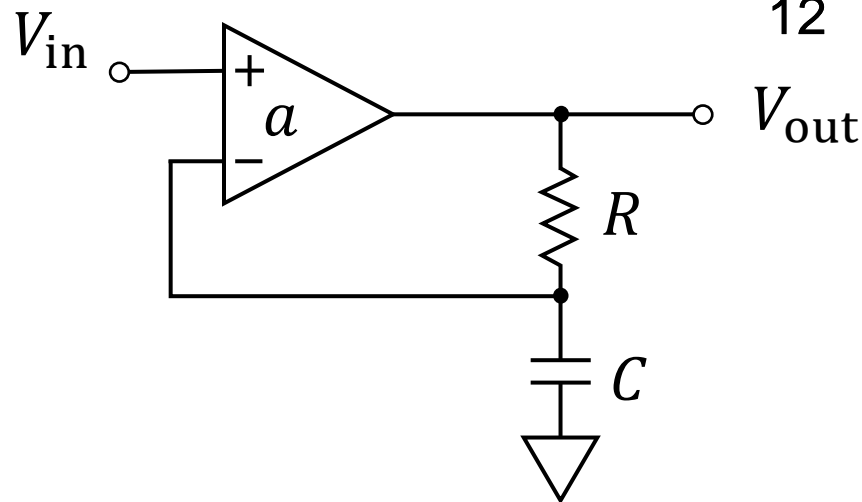
実部が正である極が含まれる場合、インパルス入力に対する出力振幅は指数関数的に増大する。

問い

a が定数でなく、実正定数 p, q を用いて

$$a = \frac{p}{1 + j\omega q}$$

で与えられるとき、安定性はどうなるか？



答

全ての枝電流、節点電圧が $\exp(st)$ に比例すると仮定すると、

$$V_{\text{out}} = \frac{a(1 + CRs)}{1 + CRs + a} V_{\text{in}} = \frac{1 + CRs}{\frac{(1 + CRs)(1 + qs)}{p} + 1} V_{\text{in}} = \frac{p(1 + CRs)}{(1 + CRs)(1 + qs) + p} V_{\text{in}}$$

$$\text{伝達関数の分母} = (1 + CRs)(1 + qs) + p = CRqs^2 + (CR + q)s + p + 1$$

上記分母 = 0 が実根をもつ場合、それらは負となる。

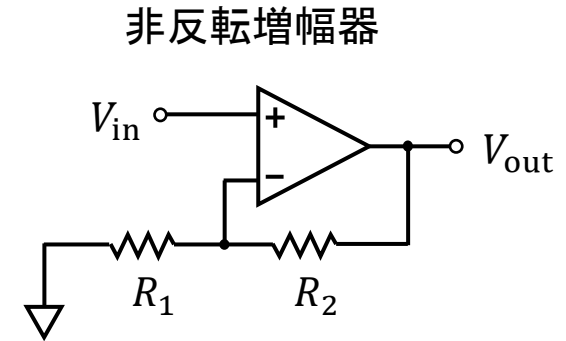
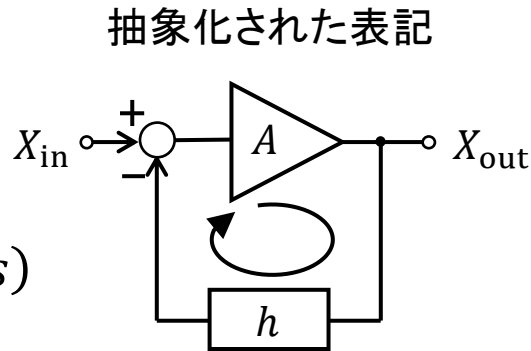
複素数解をもつ場合も、実部は負となる。

したがって、各パラメータがどのような値をとってもこのシステムは安定。

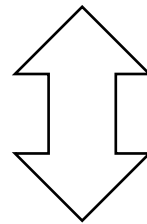
- オペアンプの増幅とフィードバックのそれぞれに1次遅れが伴っても(モデルどおりであれば)不安定化しない。

ナイキスト(Nyquist)の安定判別法

$$X_{\text{out}}(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)h(s)} X_{\text{in}}(s)$$



上記伝達関数の極 ($1 + Ah$ の零点) が右半平面に存在しない



(一巡伝達関数 Ah の極が右半平面に存在しない前提において)
 ω が 0 から $+\infty$ まで変化するとき、一巡伝達関数 $A(j\omega)h(j\omega)$
 の複素平面上での軌跡が $(-1, j0)$ を巻き込んでいなければ安定

* コーシーの偏角の原理よりただちに導かれる

1. (オペアンプ自体が不安定でない限り)フィードバックがなければ発振しないので、 Ah の極は右半平面には存在しない
2. 位相が 180° 遅れ、かつ $|Ah| > 1$ となる周波数があると不安定

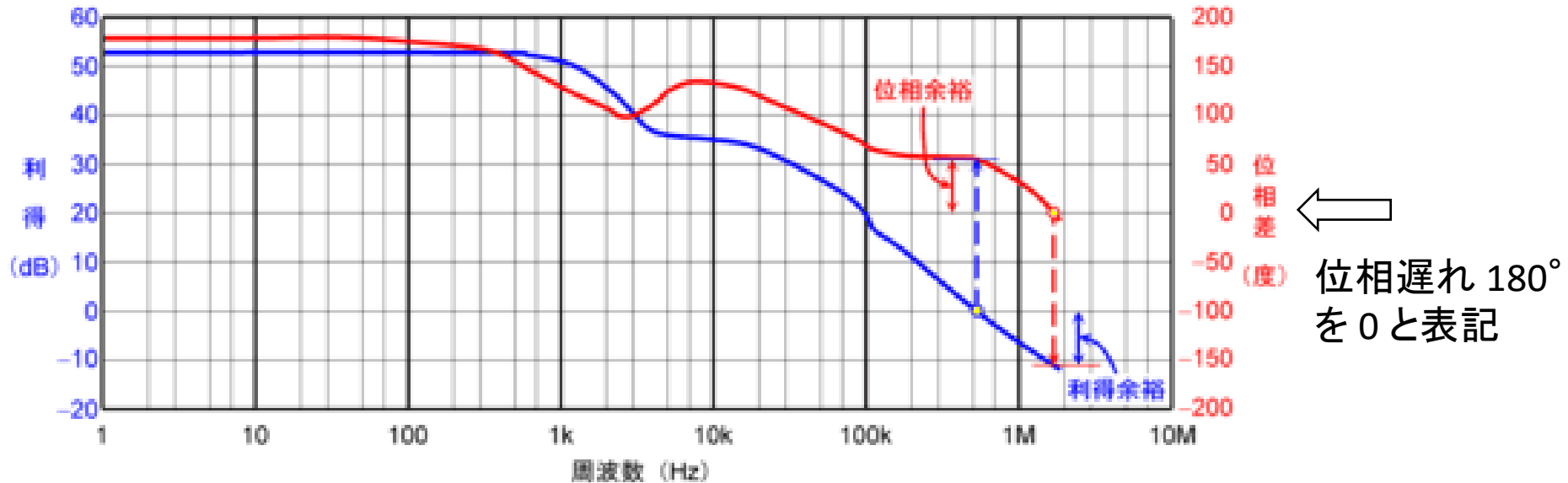
オペアンプ回路を不安定化させないためには

- a. 開ループにおける Ah の周波数特性を把握する。
- b. 位相遅れが 180° に近づく周波数において $|Ah|$ が 1 より小さくなるようにフィードバックを調整する。
→ $|h|$ を小さくする、位相進み要素を挿入する
(ゲイン余裕と位相余裕の確保)

→ $|h|$ を小さくすることは、オペアンプの本来の動作条件 ($|Ah| \gg 1$) においては増幅率を高める操作に相当している。

$|Ah| < 1$ にすることで、もはやオペアンプ本来の増幅は行われていないことに注意。

Ah の計測結果例 (ボード線図)



以下のサイトから転載

<http://www.nfcorp.co.jp/techinfo/dictionary/023.html#:~:text=%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E4%BD%99%E8%A3%95%E3%81%A8%E3%81%AF%E3%80%81%E4%B8%8B%E5%9B%B3,%E4%BD%99%E8%A3%95%E3%81%A8%E5%AE%9A%E7%BE%A9%E3%81%95%E3%82%8C%E3%82%8B%E3%80%82>

補足説明

- $1 + A(j\omega)h(j\omega) = 0$
なる ω が存在する場合、入力を与えなくてもその周波数で一定振幅の発振が継続する。
- 発振が継続する条件と、回路が不安定である条件は異なる。

実用的考察

- 使用する周波数において、位相遅れの生じないオペアンプを用い、使用しない高周波数においては Ah が小さくなるように h を設定しておくといよい。

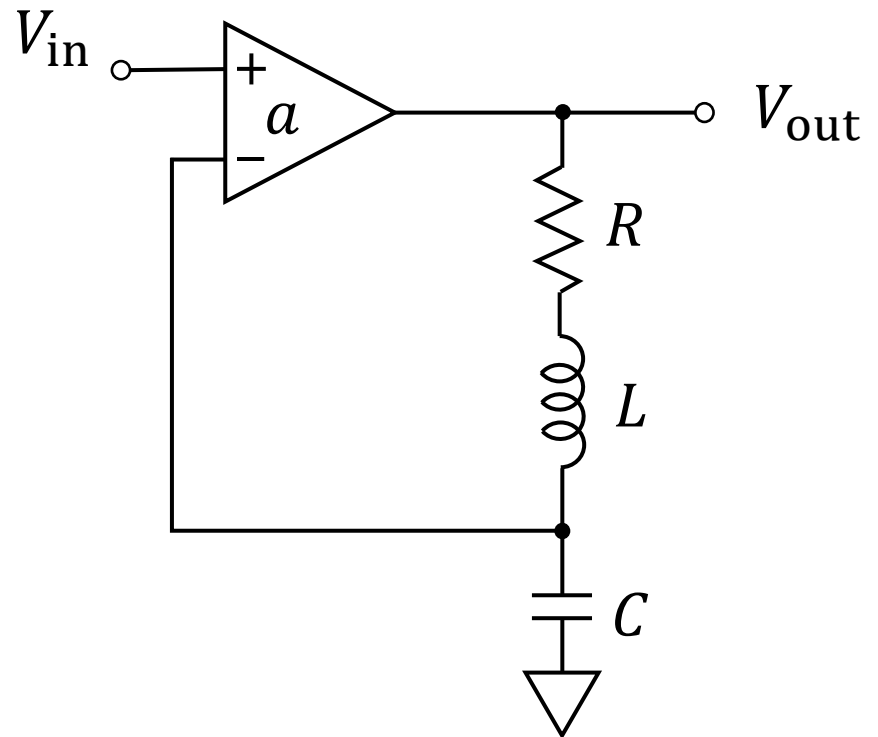
疑問

$A(s), h(s)$ がそれぞれ実定数 a, b のとき、伝達関数に極が存在しないので、システムは a, b の値によらず安定、ということになる。

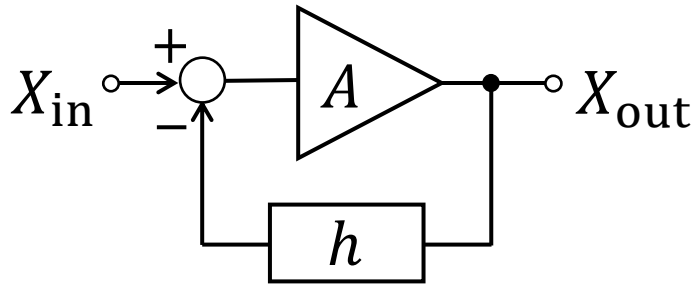
しかし実際は a, b のうち片方(だけ)を負の値にすると、負帰還は成立しないはずである。
これはどのように説明したらよいのだろうか？

例題

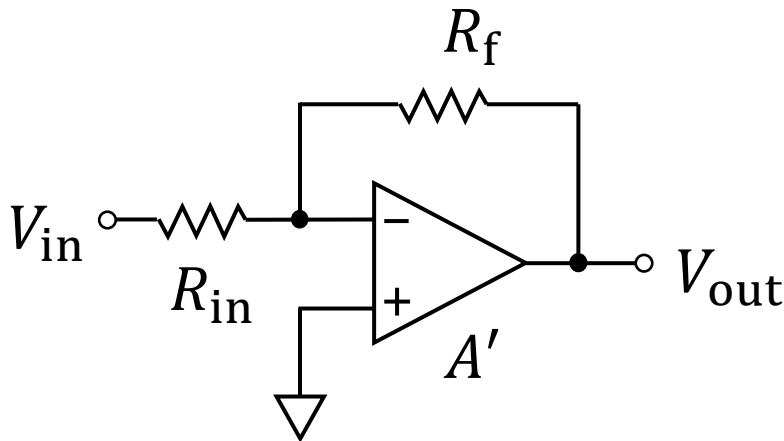
図のフィードバック回路の一巡伝達関数をボード線図で示し、安定性を評価せよ。



反転増幅器の場合の確認



$$\Rightarrow X_{\text{out}}(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)h(s)} X_{\text{in}}(s) \quad (1)$$



$$\Rightarrow V_{\text{out}}(s) = -A' \frac{R_{\text{in}} V_{\text{out}} + R_{\text{f}} V_{\text{in}}}{R_{\text{f}} + R_{\text{in}}}$$

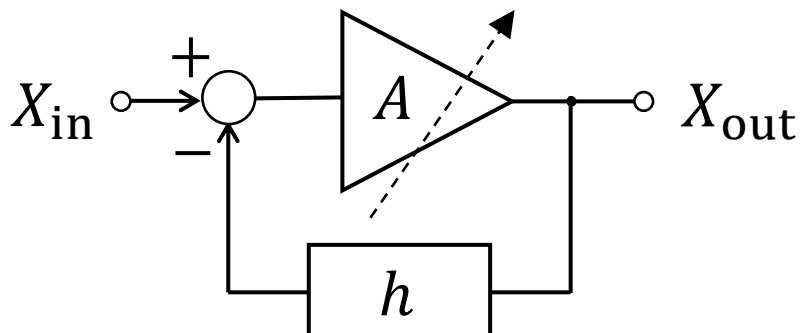
$$V_{\text{out}} + A' \frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{f}} + R_{\text{in}}} V_{\text{out}} = -A' \frac{R_{\text{f}}}{R_{\text{f}} + R_{\text{in}}} V_{\text{in}}$$

$$A = -A' \frac{R_{\text{f}}}{R_{\text{f}} + R_{\text{in}}}, \quad h = -\frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{f}}} \quad \text{とすれば式 (1) と同様な式}$$

$$V_{\text{out}} + AhV_{\text{out}} = AV_{\text{in}} \quad \text{になる。}$$

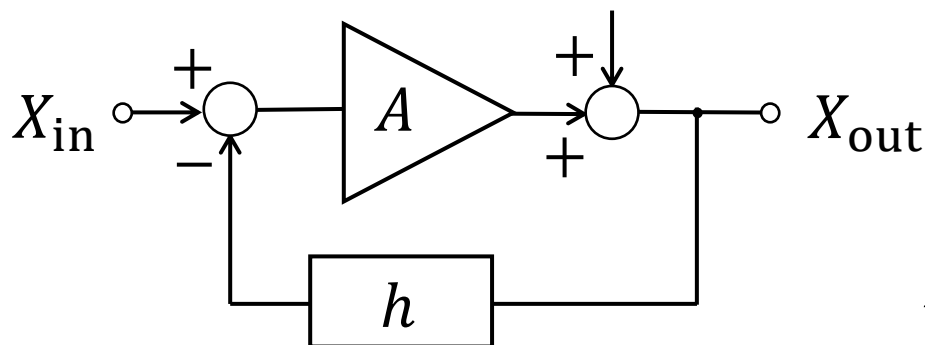
負帰還を用いた増幅の効用

利得変動



- A の変動が出力に影響しない
- 周波数特性が平坦化
- 素子特性がバラついてよい

雑音 X_N

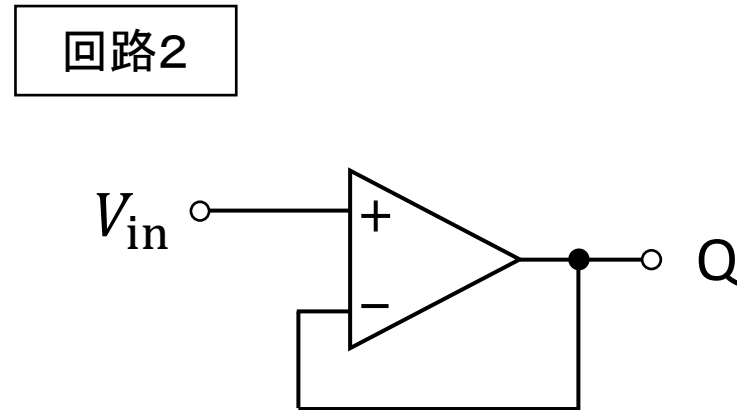
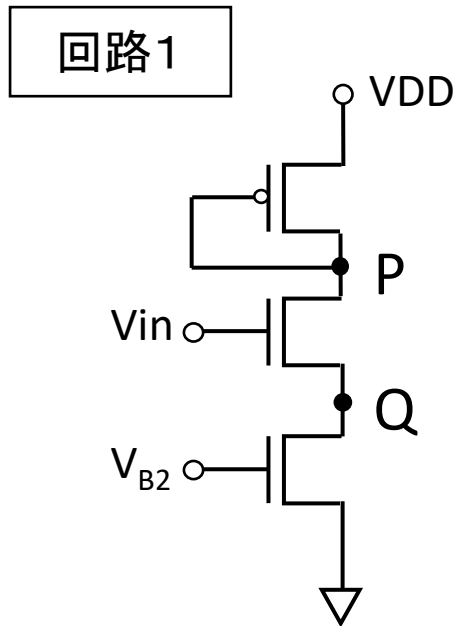


- 出力段で加わるノイズや歪みが抑制される

$$X_{out} = \frac{A}{1 + Ah} X_{in} + \frac{1}{1 + Ah} X_N$$

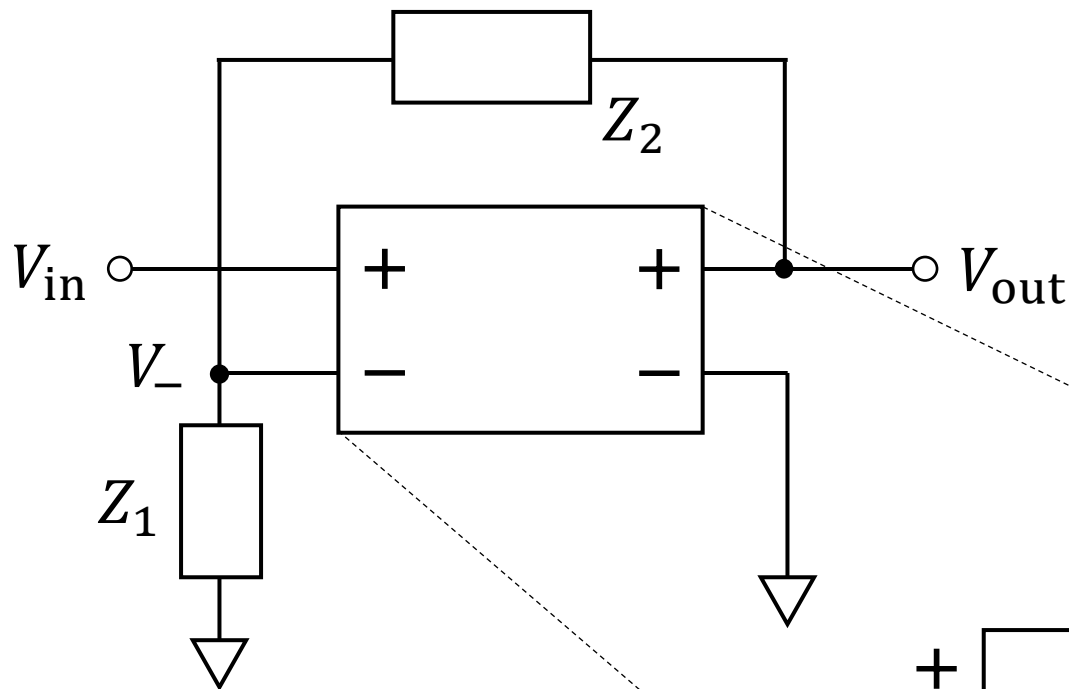
電圧フォロア

回路 1 および 2 において V_{in} を変化させると Q の電位はどのように変化するか？

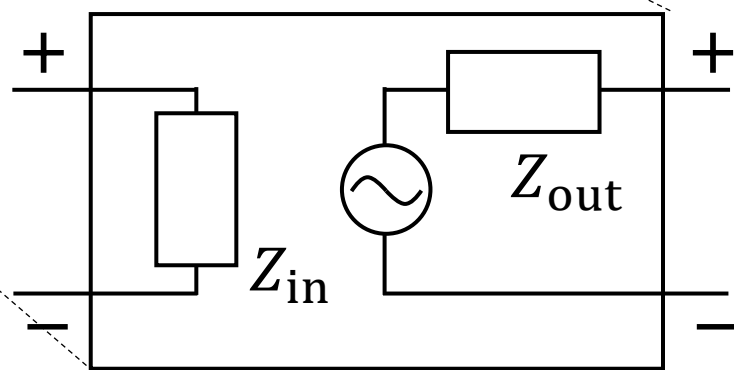


* この回路は「電圧フォロア」と呼ばれる

負帰還によるインピーダンス増減作用



上記のフィードバックを組んだ増幅器の入・出力インピーダンスと、そこに組み込まれた増幅器の入・出力インピーダンスを比較してみよう



入力インピーダンスの増大効果

入力端子と出力端子は絶縁されていて、増幅率は A とすると、
 ー入力端子の電位を V_- として

$$V_- = hV_{OUT} \quad \left(h \equiv \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)$$

$$V_{OUT} = A(V_{in} - V_-)$$

より

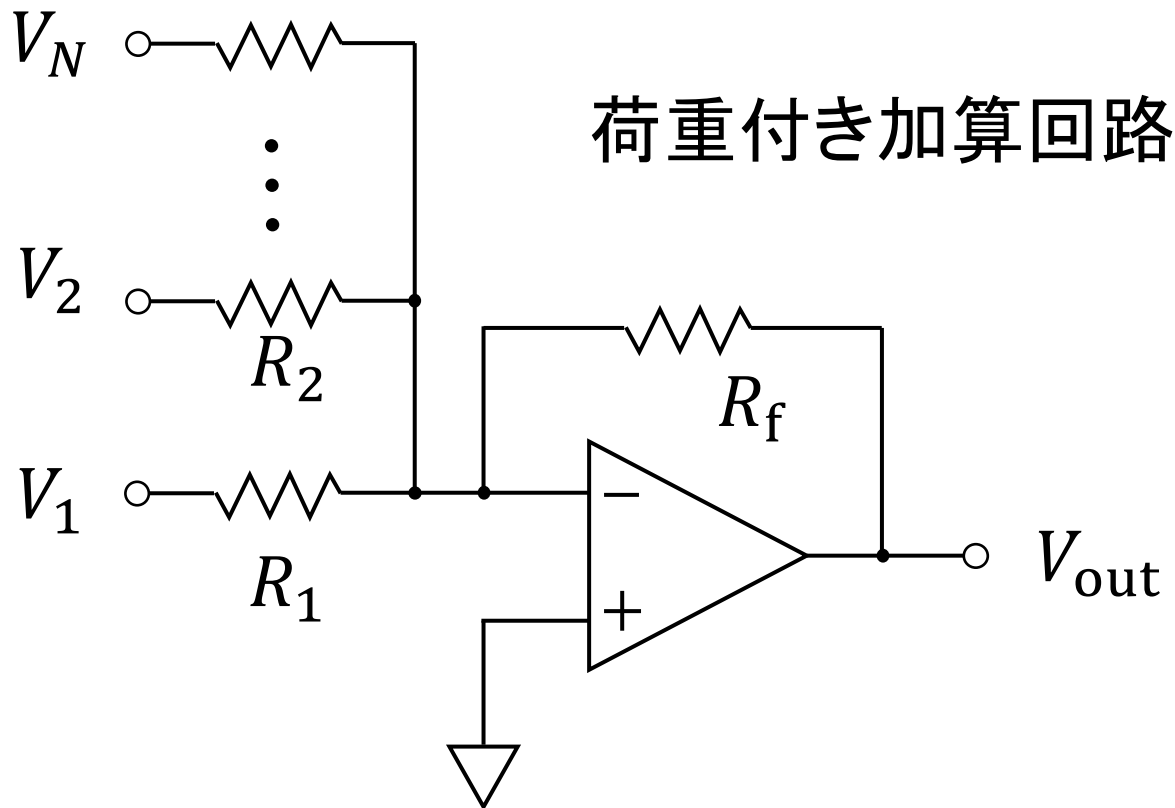
$$V_- = \frac{Ah}{1 + Ah} V_{in}$$

したがって、入力端子に流入する電流は、

$$I_{in} = \frac{V_{in} - V_-}{Z_{in}} = \frac{V_{in}}{(1 + Ah)Z_{in}}$$

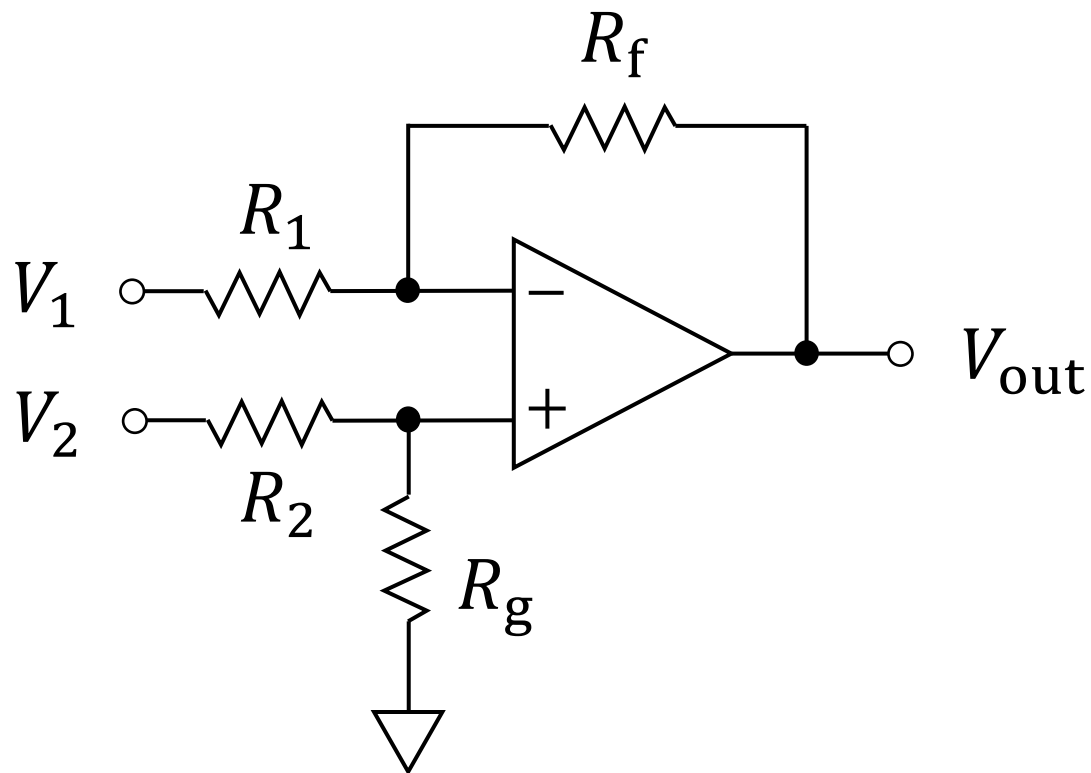
のように、ー入力端子を設置する場合の $\frac{1}{1+Ah}$ 倍になる。

オペアンプによる演算処理



* 減算回路を設計せよ

差動増幅回路(再掲)



$$\left(\begin{array}{c} R_1 \\ R_f \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} R_2 \\ R_g \end{array} \right) \text{ のとき}$$

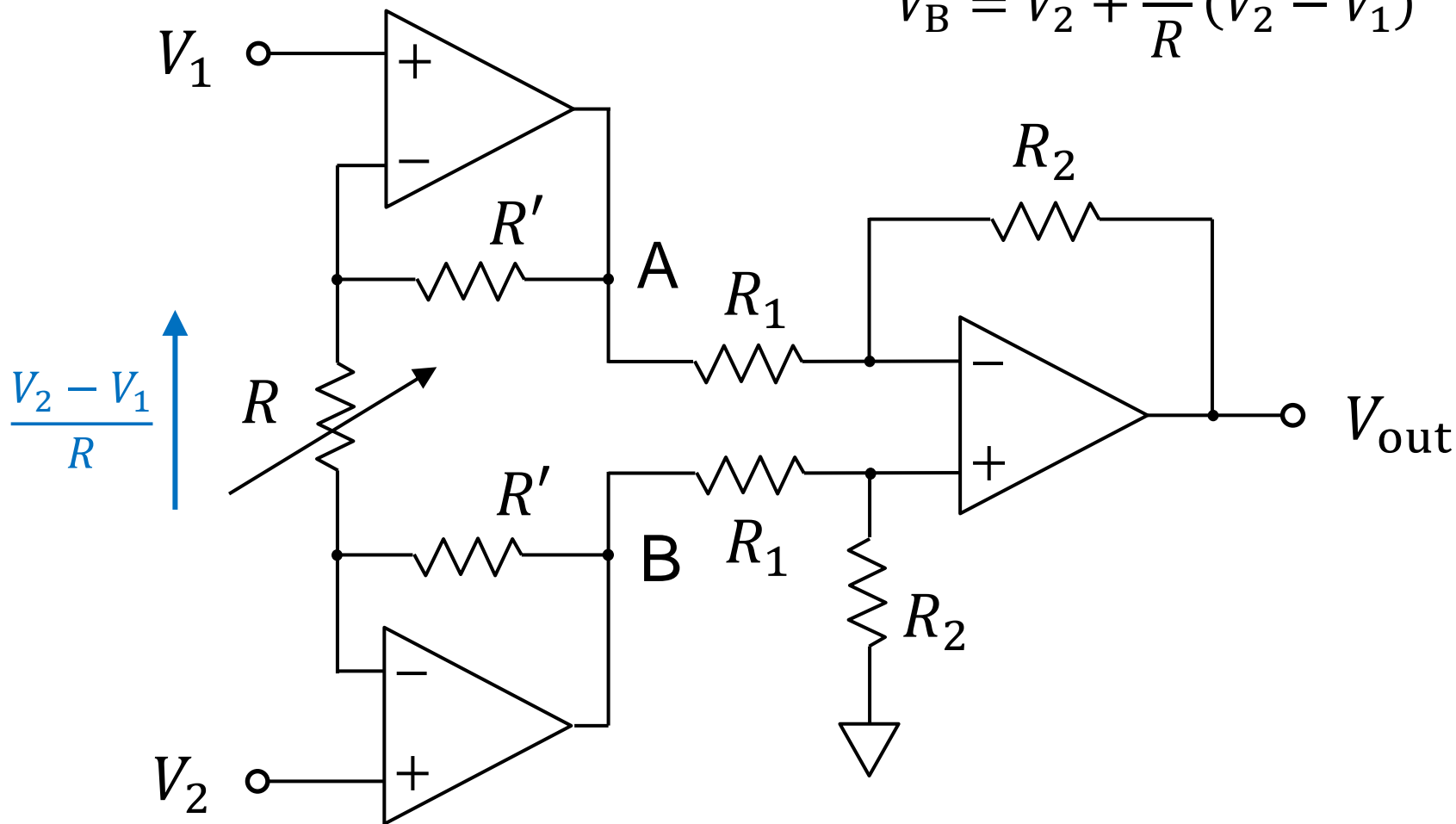
$$V_{out} = \frac{R_f}{R_1} (V_2 - V_1)$$

計裝增幅器

$$V_A = V_1 - \frac{R'}{R}(V_2 - V_1)$$

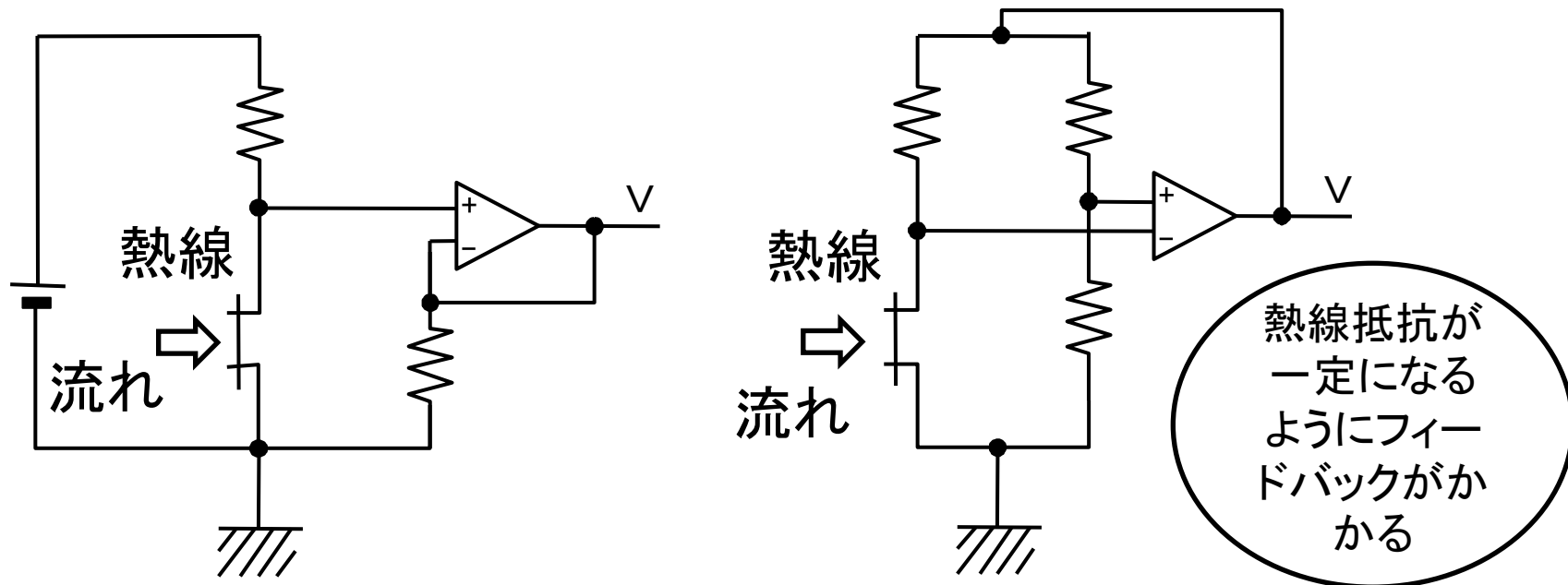
26

$$V_B = V_2 + \frac{R'}{R}(V_2 - V_1)$$



センサへの活用例

下の2種類の熱線流速センサを比較せよ。



○ 熱線から単位時間に流体中に伝達される熱量

$$H = K_1(T_w - T) \left\{ 1 + K_2 \sqrt{v} \right\}$$

v : 流速
 T : 流体の温度
 T_w : 熱線温度
 K_1, K_2 : 定数

○ 熱線の温度は発生熱量 $RI^2 - H$ の時間積分で決まる

前スライドの説明

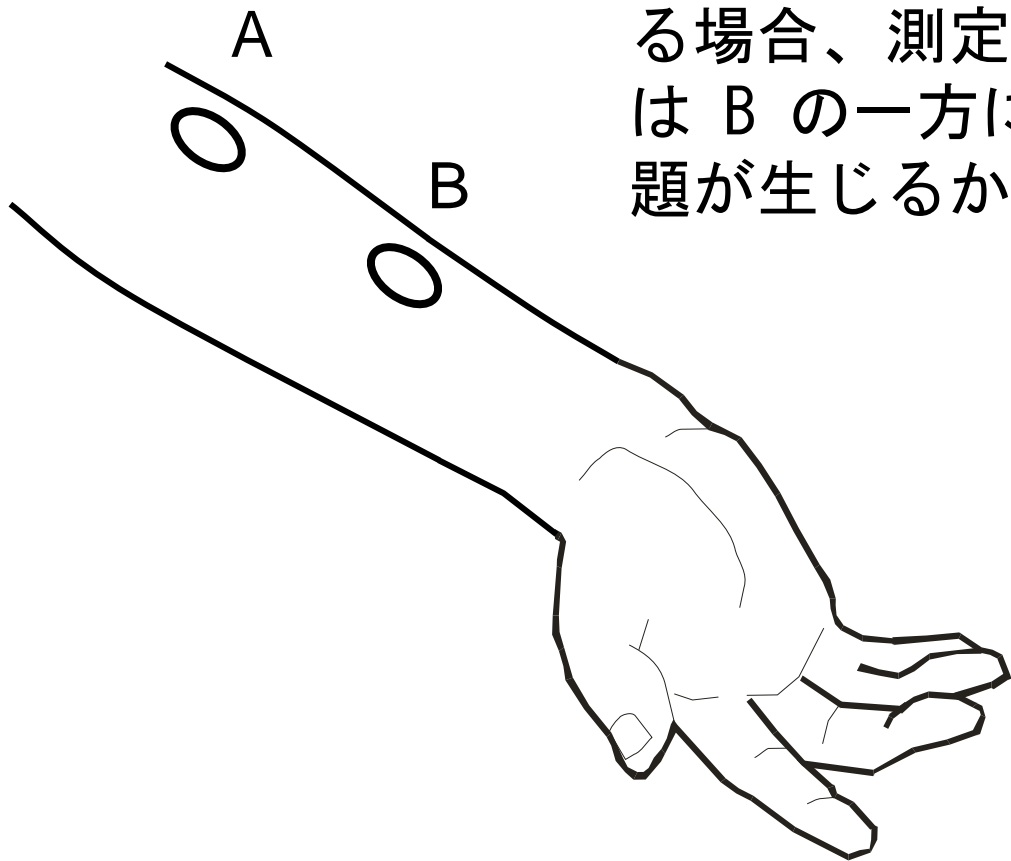
右の回路は「熱線を一定温度(一定抵抗値)に保つ」回路

右の計測方法のメリット

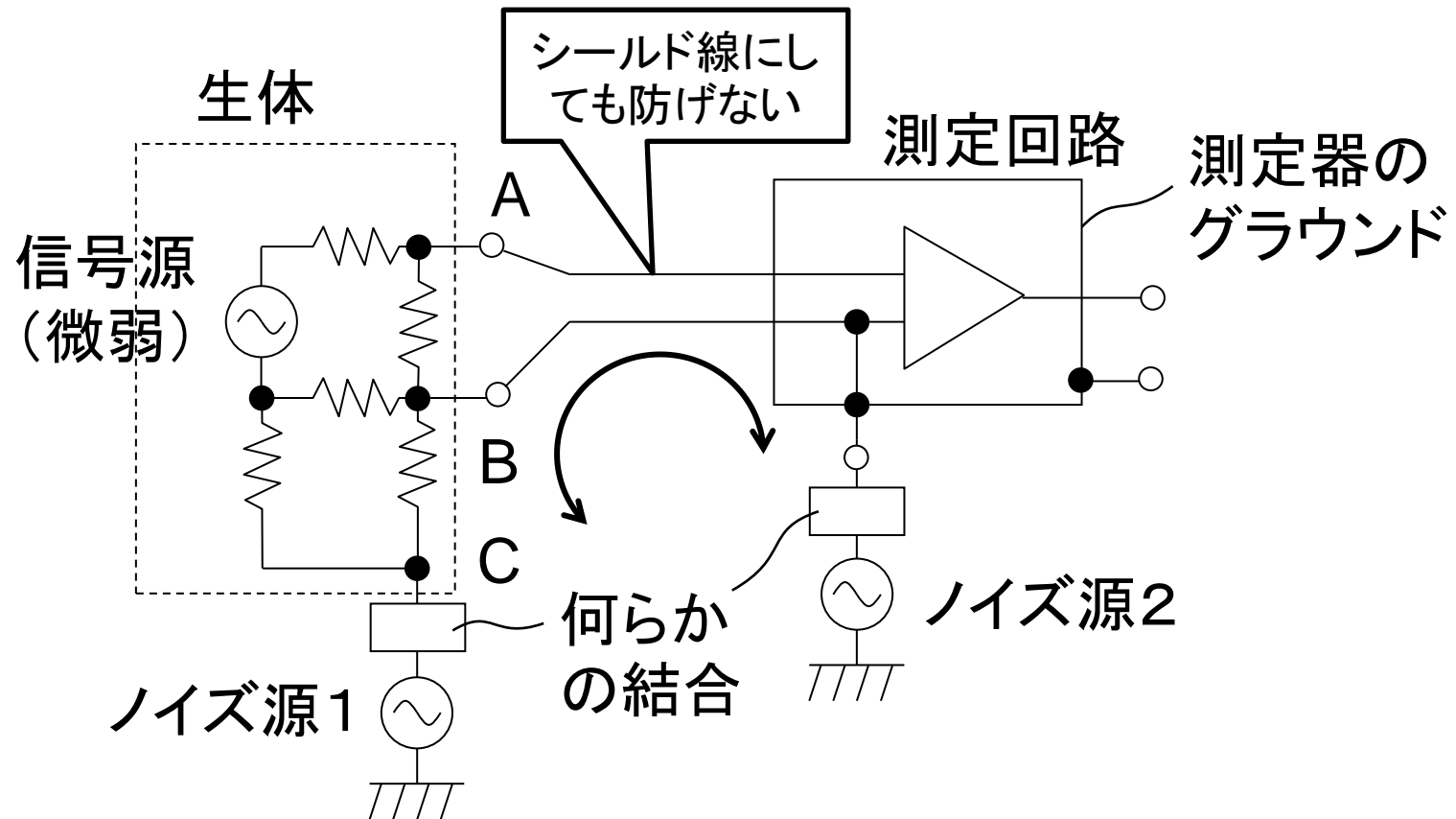
1. 電圧 V の瞬時値のみで流速 v が求まる。
左の回路では、 H の時間積分で熱線の抵抗値がきまるため、
熱線の抵抗値から温度 T_W を推定 $\rightarrow T_W$ の時間微分 \rightarrow
熱線に流入する電力と熱線の比熱から H を導出 $\rightarrow v$ を推定
という推定プロセスが必要。
 2. 左の回路では、 T_W が小さくなると感度が低下するが、右の回路
ではそれが生じない。
 T_W が小さくなると、流速変化が抵抗変化に反映されにくくなる。
- * 特に 2. はその後の処理で取り返せない性能差となる

コモンモードノイズ

点 A および点 B の間の筋電を測定する
場合、測定器のグラウンドを A また
は B の一方に接続するとどのような問
題が生じるか



A-B 間の電圧を計測する際、回路グラウンドが外界と電氣的に結合し、図の円弧矢印で示すようにグラウンドを横切る電流が流れることで、A-B 間電圧が影響を受ける。これを「コモンモードノイズ」とよび、A, B と測定回路の間の接続にシールド線を用いても防ぐことができない。筋電計測においては、もう一つの C 点と測定回路グラウンドを別の導線で結合するか、測定回路を小型化して皮膚上に装着し、信号を無線伝送することでこのノイズを防いでいる。



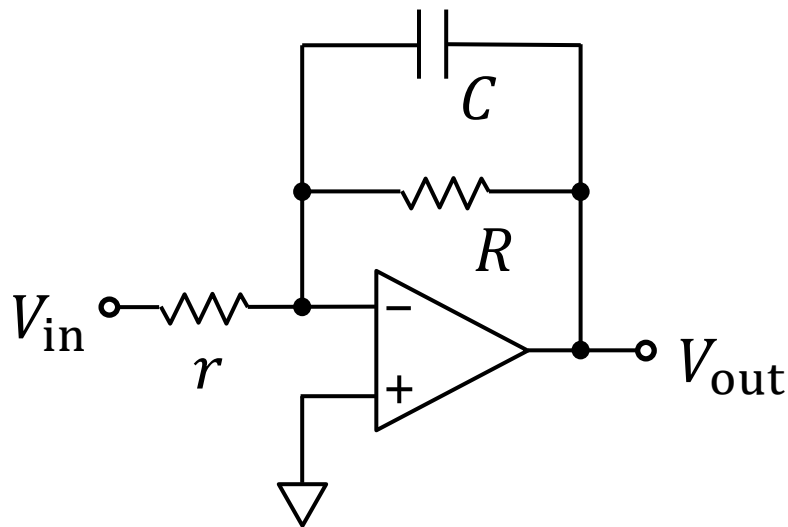
問い

抵抗とコンデンサを用いて

- a. 1次のローパスフィルタ(LPF、低域通過フィルタ)
- b. 1次のハイパスフィルタ(HPF、高域通過フィルタ)

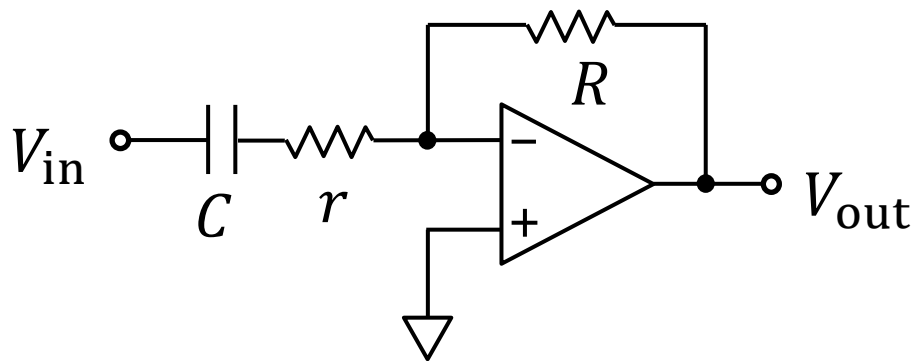
を設計せよ。

1次のローパスフィルタ、ハイパスフィルタ



- 反転増幅型のローパスフィルタ
- 入力インピーダンスが r であることに注意

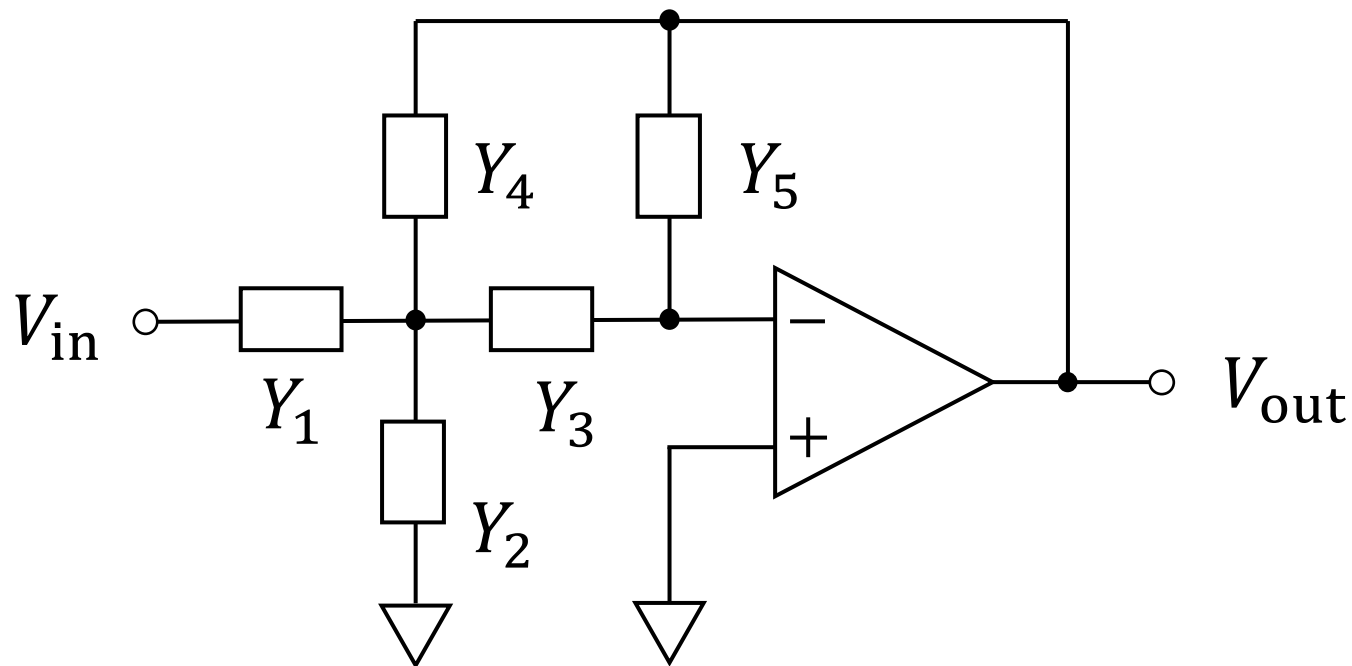
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R}{r} \frac{1}{j\omega CR + 1}$$



- 反転増幅型のハイパスフィルタ
- 入力インピーダンスが周波数で変動するので注意

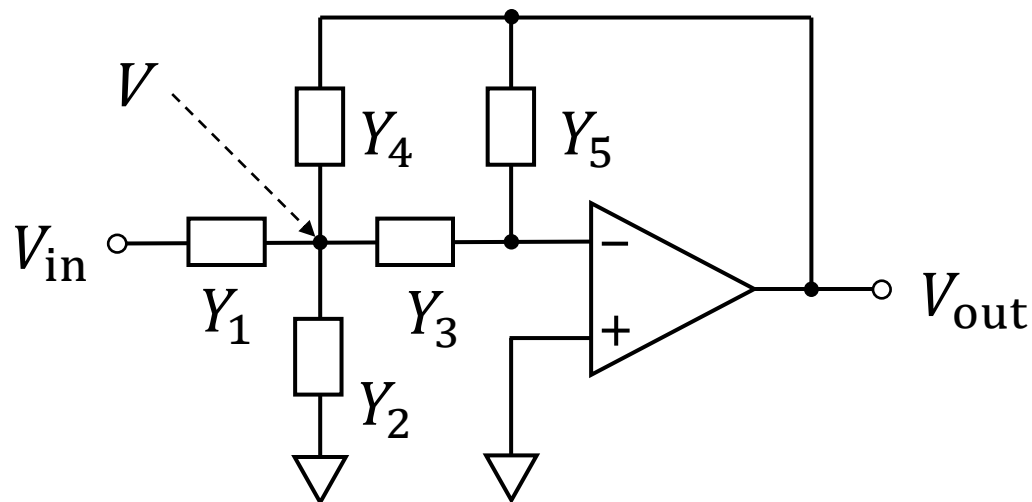
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R}{r} \frac{j\omega Cr}{j\omega Cr + 1}$$

多重帰還型能動フィルタ回路



$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

導出

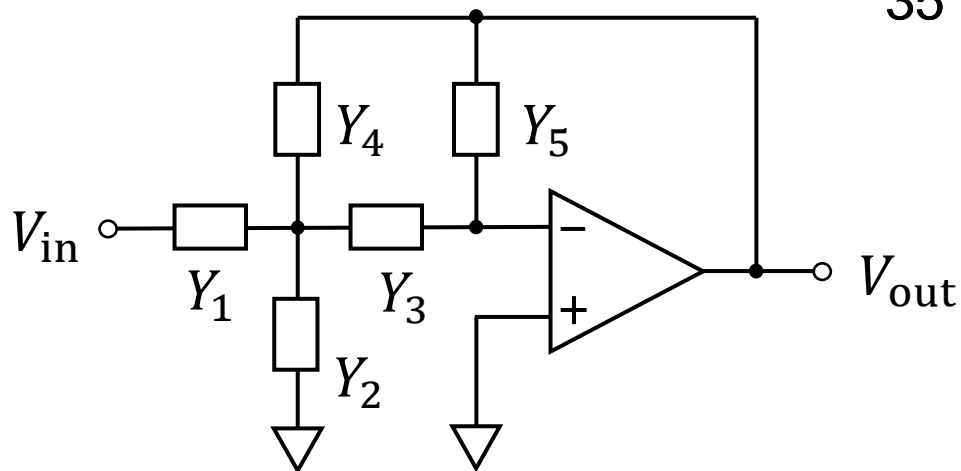


$$\left\{ \begin{array}{l} (V_{\text{in}} - V)Y_1 - VY_2 - VY_3 + (V_{\text{out}} - V)Y_4 = 0 \\ V_{\text{out}}Y_5 + VY_3 = 0 \end{array} \right.$$

よりただちに導かれる。

ローパスフィルタ

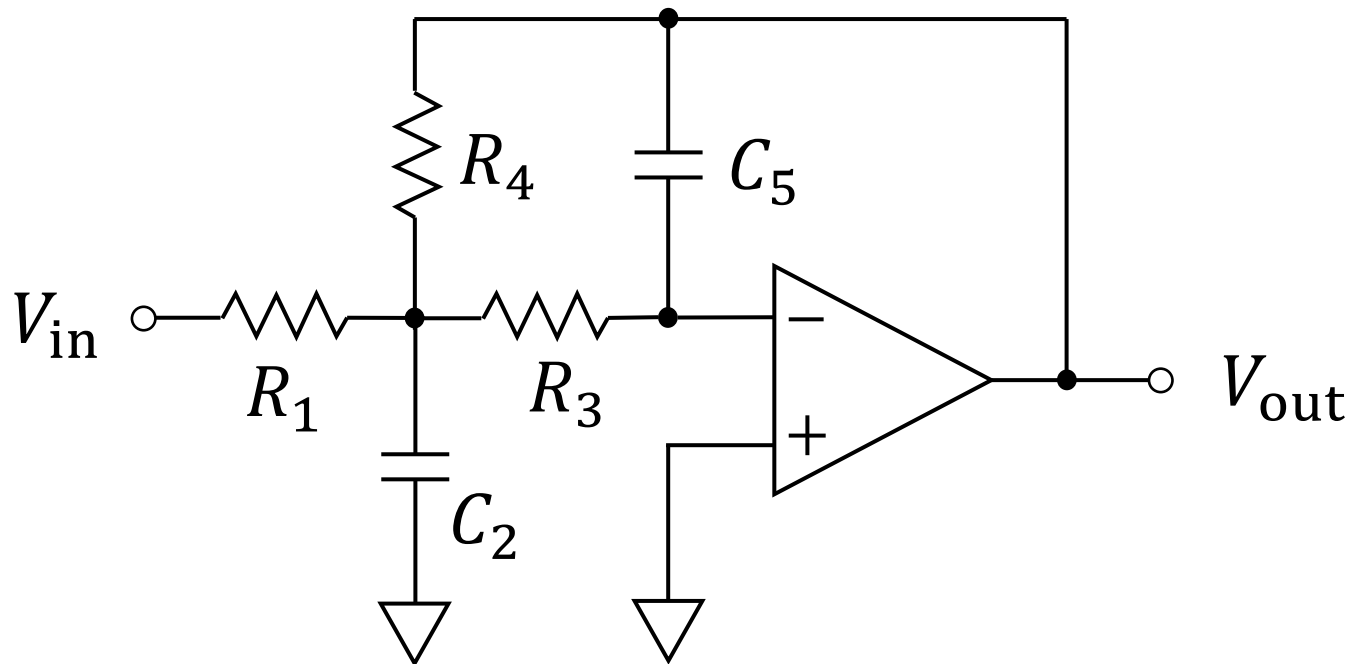
$Y_1 \sim Y_5$ に R または C をあてはめることを考える
(L は使用しないこととする)



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

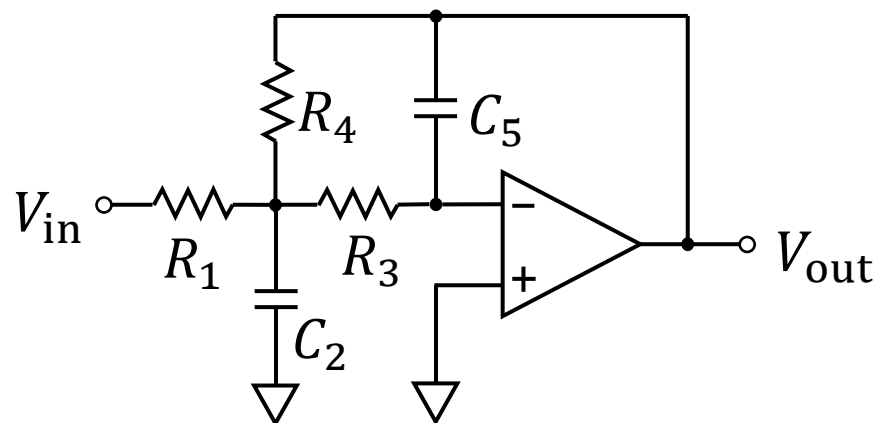
- 2次のローパスフィルタにするため、 Y_1 、 Y_3 は純抵抗でなければならない
- 分母を s の2次式にするため Y_5 はコンデンサに確定、 Y_2 または Y_4 のうちどちらかがコンデンサ
- Y_4 、 Y_5 が同時にコンデンサになると直流出力が確定しなくなるから、 Y_4 が抵抗、 Y_2 がコンデンサに確定

ローパスフィルタ



$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{R_1^{-1} R_4}{C_2 C_5 R_3 R_4 s^2 + C_5 R_3 R_4 (R_1^{-1} + R_3^{-1} + R_4^{-1}) s + 1}$$

ローパスフィルタ



$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = - \frac{A}{(s/\omega_0)^2 + 2\zeta(s/\omega_0) + 1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_2 C_5 R_3 R_4}, \quad A = \frac{R_4}{R_1}, \quad 2\zeta = C_5 R_3 R_4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \omega_0$$

バターースフィルタ

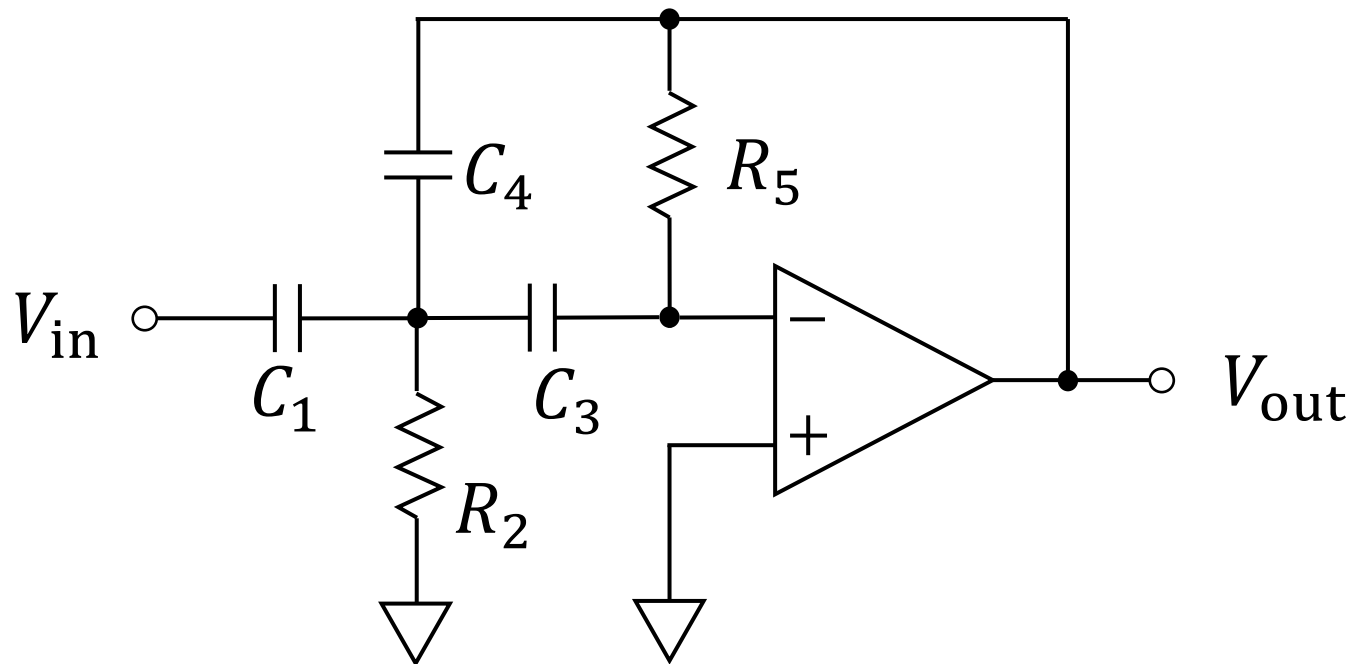
周波数特性 $B_n(j\omega)$ が

$$|B_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

をみたすフィルタを (n 次の) バターースフィルタと呼ぶ。

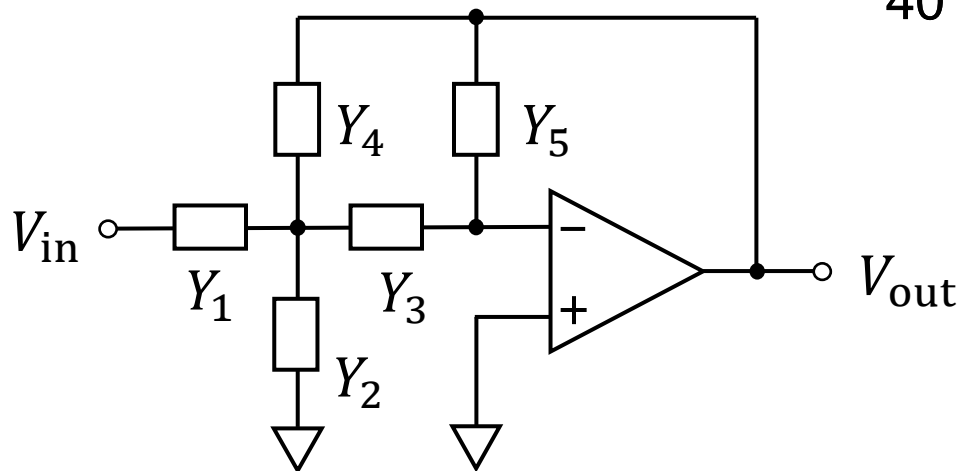
前スライドのフィルタの場合、 $2\zeta = \sqrt{2}$ のときバターースフィルタとなる。

ハイパスフィルタ



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = - \frac{A(s/\omega_0)^2}{(s/\omega_0)^2 + 2\zeta(s/\omega_0) + 1}$$

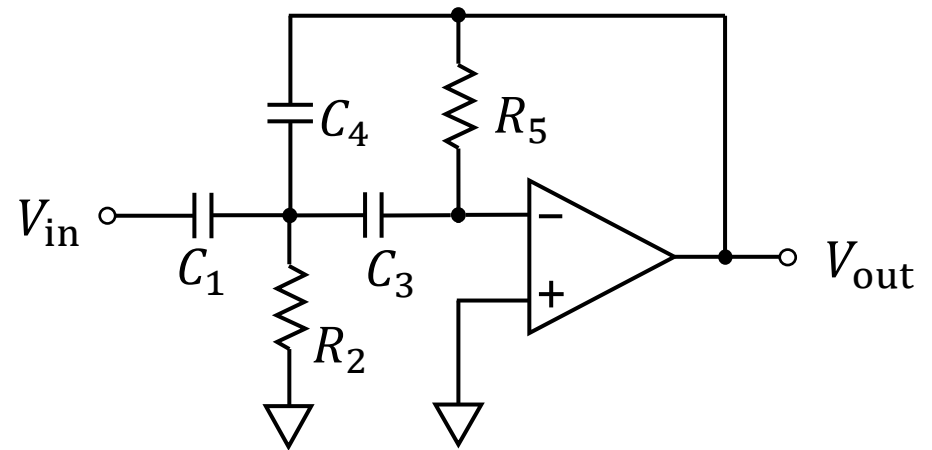
ハイパスフィルタ



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

- 2次のハイパスフィルタにするため、 Y_1 、 Y_3 はコンデンサでなければならない。
- Y_5 をコンデンサにすると分母の0次項がなくなるから Y_5 は抵抗に確定。
- 分母の2次項を確保するために Y_4 はコンデンサに確定。0次項を確保するために Y_2 は抵抗に確定。

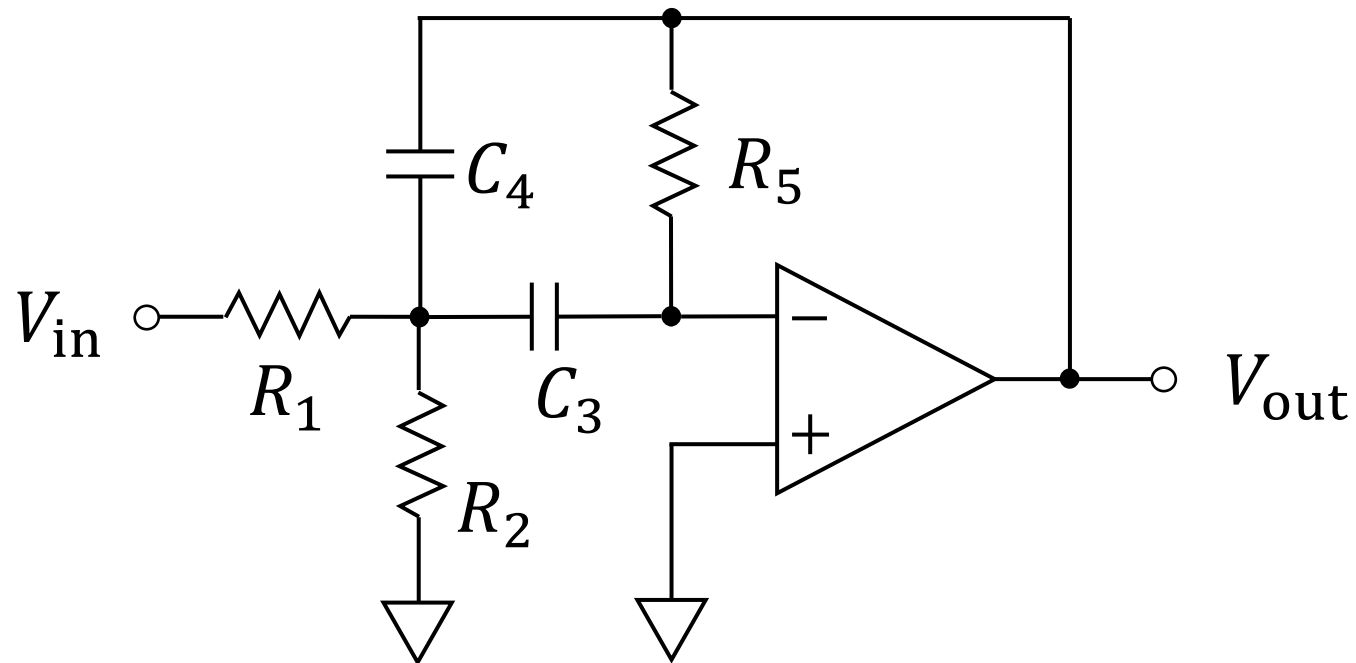
ハイパスフィルタ



$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = - \frac{A(s/\omega_0)^2}{(s/\omega_0)^2 + 2\zeta(s/\omega_0) + 1}$$

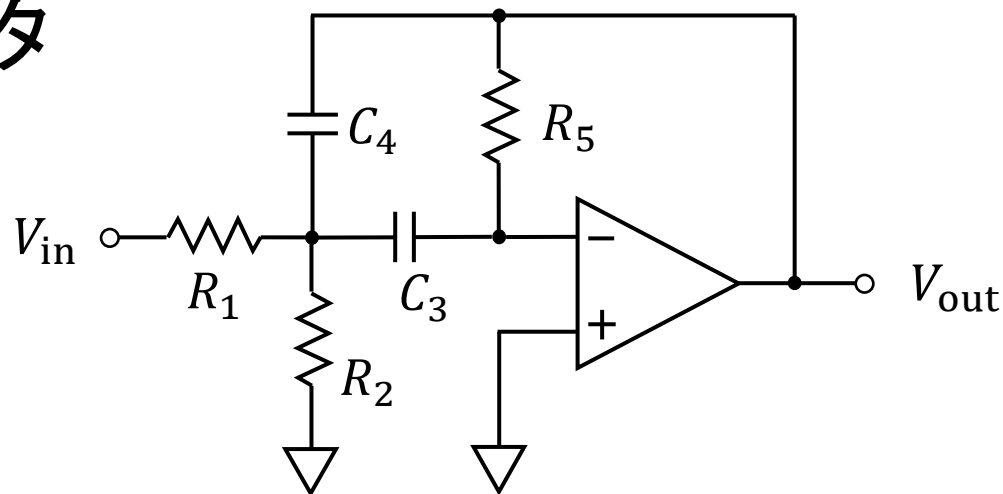
$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_3 C_4 R_2 R_5}, \quad A = \frac{C_1}{C_4}, \quad 2\zeta = (C_1 + C_3 + C_4) R_2 \omega_0$$

バンドパスフィルタ



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = - \frac{(A/Q)(s/\omega_0)}{(s/\omega_0)^2 + (1/Q)(s/\omega_0) + 1}$$

バンドパスフィルタ

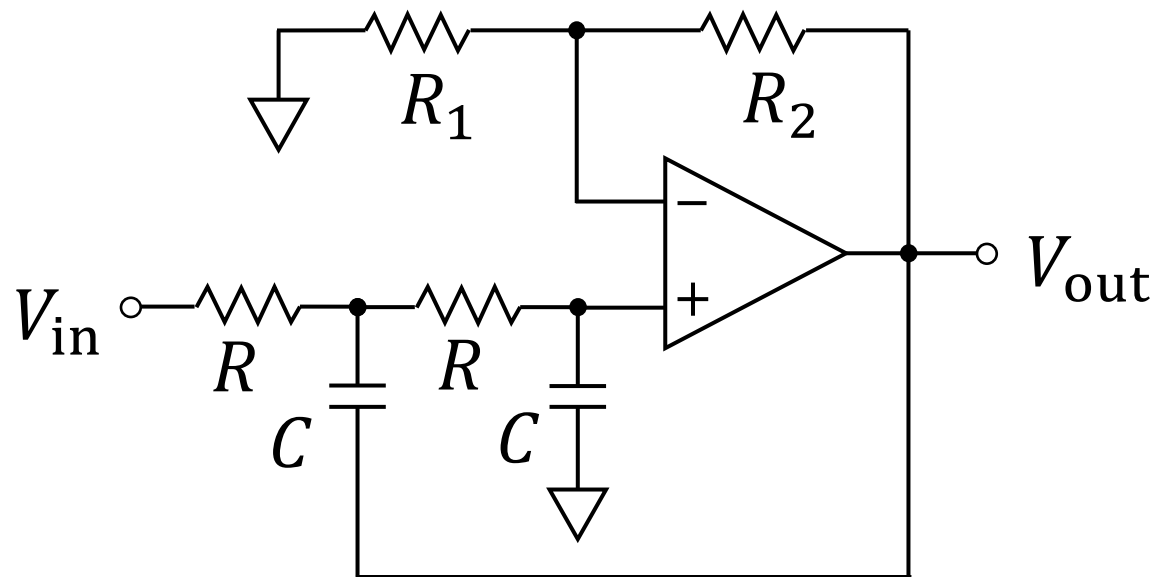


$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = - \frac{(A/Q)(s/\omega_0)}{(s/\omega_0)^2 + (1/Q)(s/\omega_0) + 1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_3 C_4 R_5} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad A = \frac{C_3 R_5}{(C_3 + C_4) R_1}$$

$$Q = \frac{1}{C_3 + C_4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\omega_0}$$

2次低域フィルタの他の構成例



$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{A}{(RCs)^2 + (3 - A)(RCs) + 1}$$

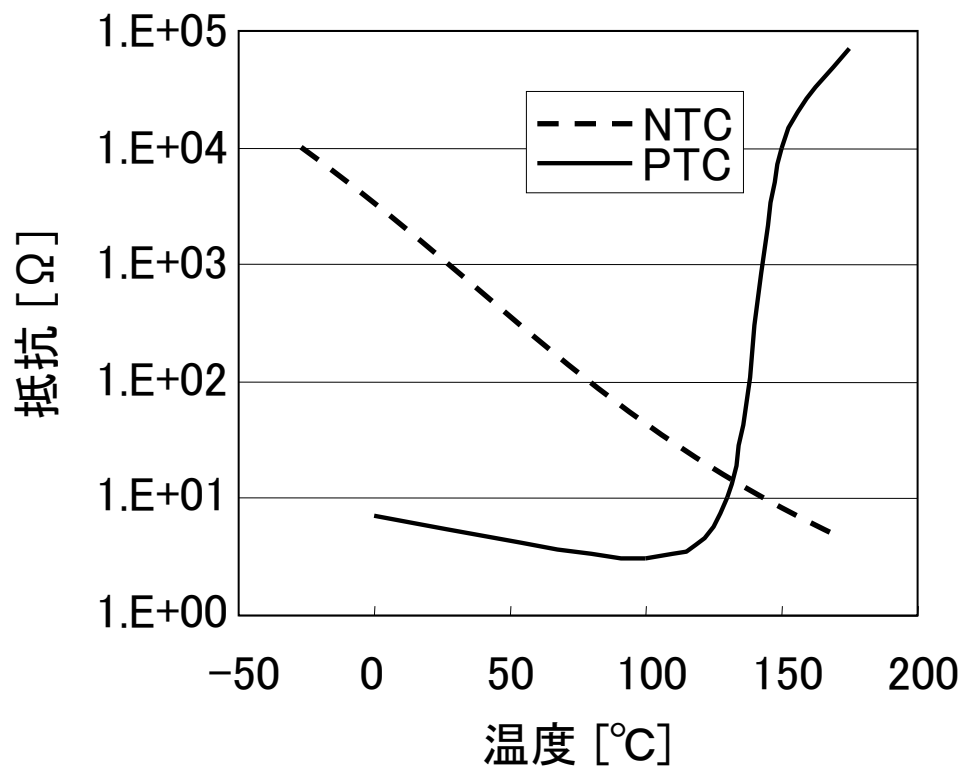
$$A = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

大局的な視点から

- 演算増幅器は大発明。外付けの受動回路によって、増幅器、バッファをはじめ様々な応用が可能。
- 抵抗とコンデンサによってフィルタ回路も構成できる。ただしデジタルフィルタが利用できる場合には、デジタルフィルタの方が柔軟かつ特性もよい。また演算増幅器が使えない高周波域では専用デバイスとしてのフィルタが利用される。

参考：物理特性を利用するフィードバックシステム

例1) 下図のような特性をもつ PTC サーミスタによってサーモスタット不要のヒータが実現される。



サーミスタの温度特性

例2) NTCサーミスタによるゲインコントローラ

